IMPERIAL MYCOLOGICAL INSTITUTE
21 SEPT. 1939

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

JUNIO 1939 — ENTREGA VI — TOMO CXXVII

SUMARIO

Pág.

SECCION SANTA FE de la Sociedad Científica Argentina:

Asamblea ordinaria del 29 de Abril de 1939 401

Visita a la destilería San Lorenzo, de Y. P. F. 401

Informe de la Presidencia leído en la asamblea ordinaria, del día 29 de Abril de 1939 402

MATEMATICAS:

J. C. VIGNAUX. — Sobre las funciones polígenas de variable compleja y bicompleja hiperbólica (*Continuación*) 407

CARLOS BIGGERI. — Sobre los puntos singulares de las funciones analíticas 430

MISCHA COTLAR. — Estructura de Anágenos (*Conclusión*) 432

CIENCIAS ECONOMICAS:

EMILIO REBUELTO. — Tarifas ferroviarias de utilidad máxima (*Continuación*) 462

Indice de materias contenidas en el tomo CXXVII 479

BUENOS AIRES

CALLE SANTA FE 1145

1939

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †
Dr. Mario Isola †
Dr. Germán Burmeister †
Dr. Benjamín A. Gould †
Dr. R. A. Philippi †
Dr. Guillermo Rawson †
Dr. Carlos Berg †
Dr. Valentín Balbín †
Dr. Florentino Ameghino †

Dr. Carlos Darwin †
Dr. César Lombroso †
Ing. Luis A. Huergo †
Ing. Vicente Castro †
Dr. Juan J. J. Kyle †
Dr. Estanislao S. Zeballos †
Ing. Santiago E. Barabino †
Dr. Carlos Spegazzini †
Dr. J. Mendizábal Tamborel †

Dr. Enrique Ferri †
Ing. Eduardo Huergo †
Ing. Guillermo Marconi †
Dr. Eduardo L. Holmberg †
Dr. Angel Gallardo †
Dr. Cristóbal M. Hicken †
Dr. Alberto Einstein
Dr. Walter Nernst

CONSEJO CIENTIFICO

Ing. Félix Aguilar; Ing. José Babini; Dr. Rómulo D. Carbia; Dr. Horacio Damianovich; Dr. Claro C. Dassen; Prof. Carlos E. Diculefait; Dr. Juan A. Domínguez; Dr. Gustavo A. Fester; Dr. Alfredo Franceschi; Dr. Joaquín Frenguelli; Dr. Josué Gollán (h.); Dr. Bernardo A. Houssay; Dr. Cristofredo Jakob; Dr. Ramón G. Loyarte; Dr. Emiliano J. Mac Donagh; Dr. R. Armando Marotta; Dr. Julio Méndez; Ing. Agr. Lorenzo R. Parodi; Dr. Franco Pastore; Capitán de fragata Héctor R. Ratto; Vicealmirante Segundo R. Storni; Dr. Enrique V. Zappi.

JUNTA DIRECTIVA

(1939-1940)

Presidente	Ingeniero **Jorge W. Dobranich**
Vicepresidente 1º	Doctor **Gonzalo Bosch**
Vicepresidente 2º	Doctor **Claro C. Dassen**
Secretario de actas	Arquitecto **Carlos E. Géneau**
Secretario de correspondencia.	Doctor **Santiago Barabino Amadeo**
Tesorero	Ingeniero **Edmundo Parodi**
Bibliotecario	Ingeniero **Carlos A. Lizer y Trelles**
Vocales	Doctor **Reinaldo Vanossi** Profesor **José F. Molfino** Doctor **Alfredo Sordelli** Ingeniero **Pablo E. Bordenave** Doctor **Marcelino Herrera Vegas** Doctor **Jorge Magnin** Doctor **Juan C. Vignaux** Doctor **Antonio Casacuberta** Ingeniero **Julio R. Castiñeiras**
Suplentes	Ingeniero **José S. Gandolfo** Ingeniero **Raúl E. Dubecq** Doctor **Alberto Castellanos** Cap. de Fragata **Teodoro Caillet Bois** Ingeniero **Alfredo G. Galmarini** Ingeniero **Benno J. Schnack**
Revisores de balances anuales.	Doctor **Félix Magnin** Ingeniero **Guillermo E. Cock**

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, Santa Fe 1145.

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

SECCIÓN OFICIAL

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

SECCIÓN "SANTA FÉ"

Asamblea ordinaria del 29 de Abril de 1939

VISITA A LA DESTILERÍA SAN LORENZO DE Y. P. F.

El 29 de Abril de 1939, bajo la presidencia del Dr. Gustavo A. Fester, se realizó la Asamblea anual ordinaria de la Sociedad Científica Argentina (Sección « Santa Fe») en la que se leyó y aprobó la memoria de la presidencia así como los balances de tesorería correspondientes al período 1938-1939, procediéndose luego a la elección de las autoridodes de la Sección para el período 1939-1940.

Ese mismo día se realizó una visita a la Destilería San Lorenzo de los Yacimientos Petrolíferos Fiscales, situada en las inmediaciones de la localidad del mismo nombre, a la que concurrió un numeroso grupo de socios de la Sección y un grupo de estudiantes de la Facultad de Química Industrial y Agrícola de Santa Fe, invitados especialmente.

La planta visitada constituye un tipo nuevo para el país pues consta de una instalación combinada de topping y cracking de flujo continuo, sin interrupción desde el aceite crudo hasta los productos finales: gasolina, nafta, kerosene, agricol. gasoil y fueloil.

Al principio se somete el crudo al topping, que utiliza una caldera tubular en lugar de la usual batería de cilindros; y las partes pesadas, gasoil y « crudo reducido » se craquean en instalaciones con torres combinadas de expulsión y burbujeo. Los polimerizados, gasoil, de las fases anteriores se craquean igualmente, y al final en fase de vapor. Es también una novedad la instalación para el aprovechamiento de los gases (exceptuando gasolina y supergás) que

se polimerizan térmicamente y que dan una nueva porción de nafta. La planta prevé la elaboración de supergás que se comenzará dentro de poco tiempo.

Los visitantes fueron acompañados y amablemente atendidos por el Sr. Administrador Ing. Julio V. Canessa y los Ings. Bartolomé Bruera y Rómulo Demattei, retirándose muy agradecidos por las finas atenciones recibidas.

INFORME DE LA PRESIDENCIA LEÍDO EN LA ASAMBLEA ORDINARIA, DEL DÍA 29 DE ABRIL DE 1939

Estimados Consocios:

Dando cumplimiento a lo dispuesto por el inc. *h*) del Art. 19 de nuestros Estatutos, elevo a vuestra consideración, un informe sobre la labor realizada, durante el período 1938-1939, y que termina en la fecha.

Comunicaciones científicas

Se realizaron durante este último período, dos sesiones de comunicaciones científicas, donde se presentaron los siguientes trabajos:

Sesión del 21 de Junio:

J. Gollán - O. Mallea. — Determinación de la capacidad de adsorción y bases intercambiables en los suelos.

J. Gollán - V. Nicollier. — Límite líquido en suelos.

G. Kleer. — Algunas rocas de Tierra del Fuego.

G. A. Fester. — La Cordillera Darwin.

J. Cruellas - R. Valetto. — Dosaje del Manganeso con la formaldoxima.

Sesión del día 4 de noviembre de 1938:

J. Babini. — Sobre un tipo de ecuaciones diferenciales lineales.

H. Damianovich. — ¿Puede obtenerse helio molecular a partir de compuestos helio-metal?

J. Gollán - M. Codoni. — Control del análisis mecánico en suelos.

G. A. Fester. — Las materias tanantes del quebracho colorado.

Estas comunicaciones tuvieron lugar en el Museo Tecnológico de la Facultad de Química Industrial y Agrícola, gentilmente cedido por el señor Decano.

Conferencias

En esta actividad, la Sociedad contó con la valiosa colaboración de estudiosos conocidos en el país y extranjero, que versaron sobre temas de singular interés, y que fueron escuchados por numeroso y atento auditorio. Las conferencias, cuyos temas se exponen más abajo, fueron ilustradas con trabajos personales y acompañadas de proyecciones luminosas.

El Dr. Joaquín Frenguelli, disertó el 1º de Julio de 1938 sobre « Qué son y para qué sirven las Diatomeas ».

El 8 de Octubre, habló el Dr. Alfredo Castellanos sobre « El subsuelo de Rosario », y el 14 del mismo mes el Dr. Ricardo A. Gaibrois sobre « Algunos aspectos modernos de la Ingeniería Sanitaria ». La Sociedad lamenta el fallecimiento de este distinguido profesional y hombre estudioso, acaecido en diciembre del mismo año, y oportunamente hizo llegar a sus familiares sus sentimientos.

Biblioteca

Como en años anteriores, la biblioteca ha ido engrosando sus estantes, con los *Anales,* publicaciones por canje, donaciones, y compras; en este último caso limitadas solo a completar la obra « Comptes rendues hebdomadaire des seances de l'Academie des Seiences », por razones pecuniarias.

A la « Nómina de publicaciones existentes en la biblioteca de la Sociedad Científica Argentina, Sección Santa Fé, de 1935 », debemos agregar dos suplementos, compilados por el Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut, que tiene a su cargo la sección Biblioteca y Canje, completamente al día, lo que es oportuno destacar. Estos Suplementos Nos. 1 y 2 de fechas Abril de 1937 y Febrero de 1939, ya impresos, se distribuirán en la semana próxima.

Tesorería

Tesorería a cargo del Ing. Quím. Enrique Virasoro, presenta un balance, cuyo detalle se agrega a este informe, y que acusa una entrada bruta de $ 1505.78 (incluso el saldo del ejercicio anterior de $ 283.78) y una salida por $ 1417.45. Vale decir que hay un saldo favorable en los dos últimos años de $ 88.33, depositado en efectivo en Tesorería. Conviene recordar, al tener en cuenta lo exiguo de estos saldos, que esta Sociedad gira a la Central 1.50 $ por cada

socio activo; quedando a favor nuestro solamente $ 0.50; aporte que la experiencia ha demostrado ser muy bajo e insuficiente para el desenvolvimiento de la Sociedad, pues aparte de los gastos de secretaría, debe tenerse presente la necesidad de adquirir revistas, ciertas publicaciones, etc.; proveer la encuadernación de las existentes, etc. Con el fin de subsanar este inconveniente, propondría a los señores consocios convenir con la Central, que a partir del próximo ejercicio se contribuya solo con el 50 % de las entradas por concepto de cuotas y en caso afirmativo, encomendar a las nuevas autoridades las gestiones del caso.

Nuevos socios

Actualmente cuenta la Sociedad con 1 socio honorario: el Dr. Juaquín Frenguelli, y 48 socios activos, habiendo renunciado durante el período 4 socios.

Lamenta sinceramente la Sociedad, el fallecimiento de dos distinguidos consocios: el del Ing. Hugo José Guinle, acaecido en Diciembre de 1938, y el del Dr. Angel Caballero Martín, cuyo deceso se produjo en Febrero del año en curso. En homenaje a ellos solicito nos pongamos de pie.

Sección publicaciones

La Sociedad como es del conocimiento de ustedes, continúa con la práctica de resumir las comunicaciones científicas, conferencias y otras actividades y hacerlas llegar a sus asociados por medio de los Anales de la Sociedad Científica Argentina de Buenos Aires y tirajes aparte. Esta laboriosa tarea está a cargo del Ing. José Babini, que corre con la corrección de pruebas y todo lo referente a los *Anales*.

Antes de dar término a esta lectura conviene destacar con toda justicia la colaboración de la Facultad de Química Industrial y Agrícola que facilitó el salón de actos con sus instalaciones y al Instituto Social de la Universidad del Litoral, porque auspició moral y materialmente la realización de varias conferencias.

Con la excursión de estudios que realizamos en el día de la fecha, a la *Destilería Fiscal de San Lorenzo*, tan gentilmente acordada por su Administrador el Ing. Julio V. Canessa, y el acto que realizamos para considerar el orden del día, cerramos el período de nuestras actividades.

Réstame por fin, esperar de vuestra amabilidad, la consideración de este informe, expuesto sintéticamente sobre la labor desarrollada por la Sociedad, en cuya tarea han intervenido y facilitado los señores miembros de la C. D. y las autoridades de la Junta Central de la Capital Federal; deseando el más franco éxito en sus gestiones a los componentes de la nueva Comisión Directiva, que resulten electos en este acto.

FRANCISCO A. BERTUZZI
Secretario

GUSTAVO A. FESTER
Presidente

Comisión Directiva
Período 1939-1940

Presidente	Dr. José Piazza
Vice-Presidente	Ing. Francisco Urondo
Secretario de actas	Ing. Quím. Carlos Christen
Secretario de correspondencia . . .	Ing. Quím. Rodolfo Chisten
Tesorero	Ing. Quím. Guillermo Berraz
Vocal titular I	Ing. José Babini
Vocal titular II	Prof. Rolando Hereñu
Vocal suplente I	Prof. Julio Salaber
Vocal suplente II	Ing. Bruno Santini
Encargado de Publicaciones	Ing. José Babini
Encargado de Biblioteca Canje . .	Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut

Socios activos

Anadón, Leonidas
Ariotti, Carlos
Babini, José
Bertuzzi, Francisco A.
Berraz, Guillermo
Bossi, Celestino
Claus, Guillermo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo
Courault, Pablo
Cerana, Miguel
Cohan, Marcos
Damionovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo
Gollán, Josué
Hereñú, Rolando
Hochewer, Curto
Juliá Tolrá, A.
Kleer, Gregorio
Lachaga, Dámaso
Mai, Carlos A.
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Marino, Antonio
Montpellier, Luis
Nigro, Angel
Niklison, Carlos
Oliva, José
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Peresutti, Luis
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Ragonese, Arturo
Salaber, Julio
Salgado, José
Schivazappa, Mario
Santini, Bruno
Simonutti, Atilio
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco
Virasoro, Enrique

BALANCE DE TESORERIA

Ejercicio: 1-V-1938 al 30-IV-1939

DEBE		HABER	
Saldo del ejercicio anterior	$ 283.78	Depositado en cuenta corriente del Banco de la Nación Argentina a la orden de la Sociedad Científica Argentina	$ 1086.00
Importe de 611 recibos de la Sociedad Científica Argentina (Sección Santa Fé)	» 1222.00	Por comisión cobranza de 599 recibos de la Sociedad Científica Argentina (Sección Santa Fe)	» 179.70
		Impresiones varias	» 58.50
		Suscripción por 1 año « Comptes Rendus de l'Academie des Sciences », Francia	» 60.85
		Artículos de librería y gastos varios	» 17.40
		Por gastos de excursiones	» 15.00
		Efectivo en Tesorería	» 88.33
	$ 1505.78		$ 1505.78

Santa Fé, 30 de Abril de 1939.

E. VIRASORO
Tesorero

G. FESTER
Presidente

SOBRE LAS FUNCIONES POLÍGENAS DE VARIABLE COMPLEJA Y BICOMPLEJA HIPERBÓLICA

Por J. C. VIGNAUX

(*Continuación* *)

CAPITULO II

FUNCIONES POLIGENAS DE UNA VARIABLE COMPLEJA HIPERBOLICA

Propiedades generales

14. *Definiciones.* — Diremos que $z = x + jy$ es una *variable compleja hiperbólica*, si x e y son dos variables reales independientes, donde j es la *unidad imaginaria hiperbólica* ($j^2 = +1$).

Si adoptamos un sistema de ejes rectangulares x, y y representamos el número z, por un punto del plano de coordenadas x é y, su campo de variabilidad es el conjunto de puntos en el cual z está dado.

La variable z es acotada, si son acotadas las dos variables reales x e y.

Pongamos

$$\overline{\lim}\ x = \alpha' \qquad \underline{\lim}\ x = \alpha''$$

$$\overline{\lim}\ y = \beta' \qquad \underline{\lim}\ y = \beta'' ,$$

por definición, los dos números complejos hiperbólicos

$$l' = \alpha' + j\beta' \quad , \quad l'' = \alpha'' + j\beta'' ,$$

llamaremos respectivamente, el *límite superior* y el *límite inferior* de la variable z.

$$l' = \overline{\lim}\ z \quad , \quad l'' = \underline{\lim}\ z .$$

* Ver estos *Anales*, E. IV - T. CXXVII, pág. 241 y sig.

Se tiene

$$\overline{\lim}\ (x + j\,y) = \overline{\lim}\ x + j\,.\,\overline{\lim}\ y$$

y

$$\underline{\lim}\ (x + j\,y) = \underline{\lim}\ x + j\,.\,\underline{\lim}\ y$$

El límite de z se define del mismo modo.

Pongamos

$$\lim x = a \quad ; \quad \lim y = b$$

el número complejo hiperbólico

$$l = a + j\,b$$

será el límite de z.

En este caso resulta

$$l = l' = l''\,.$$

La variable compleja hiperbólica $w = u + jv$, es *función* de la variable compleja hiperbólica $z = x + jy$ en el sentido general, si a cada valor de z de un cierto conjunto D, corresponde uno o varios valores para w, bien determinados.

La relación

$$w = f\,(z)$$

entre w y z equivale a las dos relaciones

$$u = u\,(x, y) \quad , \quad v = v\,(x, y)$$

que definen a u y v, como funciones de dos variables relaes x e y. Toda función $f\,(z)$, se puede poner por tanto, en la *forma normal*

$$w = f\,(z) = u\,(x, y) + j\,v\,(x, y)\,.$$

La función $f\,(z)$ es *contínua* en el punto z_0, si fijado un número $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número $\delta > 0$, tal que

$$|\,f\,(z) - f\,(z_0)\,| < \varepsilon \quad \text{para} \quad |\,z - z_0\,| < \delta$$

De aquí resulta

$$|\,u\,(z) - u\,(z_0)\,| < \varepsilon\,, \quad |\,v\,(z) - v\,(z_0)\,| < \varepsilon$$

en todo entorno de z_0

$$|\,z - z_0\,| < \delta\,,$$

por tanto, las funciones $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ son contínuas en el conjunto (x, y). Recíprocamente ,si las componentes u y v son contínuas la $f(z)$ es función contínua.

Para representar los valores w de la función adoptaremos otro sistema de ejes rectangulares (u, v). Si las componentes u y v son en el dominio D, derivables parcialmente y su *jacobianao*

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

es distinto de cero, la relación

$$w = f(z) = u + j v ,$$

equivale a dar una correspondencia puntual entre el plano (x, y) y el plano (u, v) de modo que a toda área D del primero, corresponde una cierta área D' del plano w.

Cuando la variable z, está dada en su forma isótropa: $z = z' j_1 + z'' j_2$, la función $f(z)$ es entonces de la *forma isótropa.*

$$f(z) = j_1 P(z', z'') + j_2 Q(z', z'')$$

donde P y Q son dos funciones reales de las dos variables reales z' y z'' (primer y segunda componente isótropa).

Es por tanto, *condición necesaria y suficiente para que la función w sea contínua que lo sean sus dos componentes isótropas P y Q.*

15. *Derivada radial.* — Sea δ una recta del plano z, que pasa por el punto fijo z del dominio D.

Llamaremos *límite radial* y designaremos con la notación

$$\lim_{h \to 0} (\delta) F(z, h)$$

al límite cuando existe de $F(z, h)$ para $h \longrightarrow 0$ de modo que el punto $z + h$ permanezca siempre sobre la recta δ.

Consideremos la función

$$w = f(z) = u + j v ,$$

dada en el dominio D y supongamos que en cada punto z interior al dominio D el límite radial

$$\lim_{h \to 0} (\delta) \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

exista para cada recta δ que pasa por el punto z la cual forme con el sentido positivo del eje $0x$, un cierto ángulo φ. A éste número llamaremos la *derivada radial* de $f(z)$ en el punto z, e indicaremos con la notación

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{\delta}.$$

Diremos que la función compleja de la variable $z = x + jy$

$$w = f(z) = u(x, y) + j\, v(x, y)$$

es *función polígena hiperbólica*, si u y v son funciones reales de x e y, contínuas y con derivadas parciales contínuas.

Estas funciones tienen la propiedad fundamental, de tener en cada punto, una derivada determinada para cada dirección dada.

En efecto; consideremos la relación incremental

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + j\,\Delta v}{\Delta x + j\,\Delta y} \qquad \text{con} \qquad \Delta x \neq \Delta y,$$

es decir, que el punto variable $z + \Delta z$, no pertenezca a uno de los dos rayos formados por las bicsetrices de los ejes coordenados.

Se tiene

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + j\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x + j\,\Delta y} + \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\Delta x + j\,\Delta y}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) + j\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{1 + j\,\frac{\Delta y}{\Delta x}} + \eta$$

donde η es un infinitésimo con $(\Delta x, \Delta y)$.

Hagamos ahora tender $\Delta z \longrightarrow 0$ de modo que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$, donde m es la pendiente de la recta δ; se tiene

$$\lim_{h \to 0} (\delta) \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} m + j\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} m\right)}{1 + jm} \qquad [2]$$

puesto que el término complementario $\eta \longrightarrow 0$.

El límite (2) depende no solamente del punto fijo z, sino también del parámetro m.

Para cada punto z y valores variables de m, el primer miembro existe, como función de m. Por tanto, la derivada radial de una función polígena hiperbólica

$$f(z) = u + jv$$

está dada por la expresión

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_m = \frac{1}{1+jm}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} j\right) + m\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} j\right)\right] \qquad [3]$$

es decir

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_m = \frac{1}{1+mj}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + m\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Debemos excluir las direcciones de las dos bisectrices de los ejes coordenados según las cuales no existen las derivadas radiales; puesto que en este caso el complejo. $1 \pm j$ es un divisor de cero y la relación incremental no existe.

16. *Representación geométrica.* — Si representamos las variables $z = x + jy$, $w = u + jv$ en sus planos respectivos y adoptamos un tercer plano coordenado (X, Y) para representar a la derivada radial

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_m = X + jY\ ,$$

a cada punto z de z, corresponde un punto w del plano w, mientras que para $X + jY$ resultan infinitos puntos, correspondientes a los diversos valores del parámetro $m \neq 1$.

Estos puntos se encuentran en la hipérbola equilátera de ecuación (*hipérbola derivada*) (1)

$$\left(X-\frac{u_x'+v_y'}{2}\right)^2-\left(Y-\frac{u_y'+v_x'}{2}\right)^2=\left(\frac{u_x'-v_y'}{2}\right)^2-\left(\frac{u_y'-v_x'}{2}\right)^2 \qquad [\alpha]$$

En efecto; de la relación (2) se deduce

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+m\frac{\partial u}{\partial y}\right)+j\left(\frac{\partial v}{\partial x}+m\frac{\partial v}{\partial y}\right)=(X+jY)(1+mj)$$

Separando la parte real y la parte imaginaria, la última igualdad equivale al siguiente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+m\dfrac{\partial u}{\partial y}=X+mY \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+m\dfrac{\partial v}{\partial y}=Y+mX\ , \end{cases}$$

de donde, eliminando m, resulta

$$(X-u'_x)(v'_y-X)=(Y-v'_x)(u'_y-Y)$$

es decir

$$X^2-Y^2-(u_x'+v_y')X+(u_y'+v_x')Y=u_y'v_x'-u_x'v_y'$$

o bien

$$\left(X-\frac{u_x'+v_y'}{2}\right)^2-\left(Y-\frac{u_y'+v_x'}{2}\right)^2+\left(\frac{u_y'+v_x'}{2}\right)^2-\left(\frac{u_x'+v_y'}{2}\right)^2$$
$$=u_y'v_x'-u_x'v_y'$$

la cual se puede poner en la forma (α) (2).

El centro de esta hipérbola, tiene por coordenadas

$$\alpha=\frac{1}{2}(u_x'+v_y')\quad,\quad \beta=\frac{1}{2}(u_y'+v_x')$$

(1) En el caso de las funciones polígenas ordinarias, el *indice* $X+iY$ se encuentra sobre una circunferencia (*círculo de* KASNER).

(2) El Ing. P. Capelli se ocupa del estudio geometrico de la derivada radial de estas funciones en una Nota en curso de publicación en este mismo lugar.

y sus asintotas son las paralelas a las bisectrices de los angulos (X, Y). Si la función es monógena la (α) se reduce a

$$(X - u_x')^2 - (Y - u_y')^2 = 0 \cdot$$

es decir

$$(X - u_x' + Y - u_y')\,(X - u_x' - Y + u_y') = 0$$

de donde

$$\begin{cases} X = u_x' \\ Y = u_y' \end{cases}$$

es decir, se reduce a un punto (u_x', u_y').

17. La expresión (3) del número anterior, que define la derivada radial de $f(z)$, se puede poner también en la forma siguiente

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_m = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)j\right]\frac{1+mj}{1+mj} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)j\right]\frac{1+mj}{1+mj} \quad [1]$$

Si es $m < 1$, ponemos

$$1 + mj = \rho\,(\cos h\,\varphi + j\,\mathrm{sen}\,h\varphi) = \rho\,e^{+j\varphi}$$

$$1 - mj = \rho\,(\cos h\,\varphi - j\,\mathrm{sen}\,h\varphi) = \rho\,e^{-j\varphi}$$

donde φ es el argumento hiperbólico de la dirección m. Se tiene entonces

$$\frac{1 - mj}{1 + mj} = e^{-2j\varphi}$$

Si es $m > 1$; ponemos

$$1 + mj = \rho\,(\mathrm{sen}\,h\,\varphi + j\,\cos h\,\varphi) = \rho\,.\,j\,e^{j\varphi}$$

$$1 - mj = \rho\,(\mathrm{sen}\,h\,\varphi - j\,\cos h\,\varphi) = -\,\rho\,.\,j\,e^{-j\varphi}$$

de donde

$$\frac{1 - mj}{1 + mj} = -\,e^{-2j\varphi}\,.$$

Por tanto, la fórmula (1) se puede escribir [1]

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_m = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) j\right] +$$

$$\pm \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) j\right] e^{-2j\varphi} .$$

18. *Función monógena hiperbólica.* — Se dice que la función $f(z)$ es *monógena hiperbólica* en el punto z, si la derivada radial es la misma cualquiera sea la dirección m.

Según la fórmual anterior, es suficiente que se tenga

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial u}\right) + j\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 .$$

de donde resultan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

que son las condiciones de monogeneidad hiperbólica.

Sea

$$w = f(z) = u + j\,v$$

una función polígena hiperbólica en el dominio D.

Pongamos

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\,\frac{\partial v}{\partial x} \qquad [1]$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + j\,\frac{\partial v}{\partial y} \qquad [2]$$

De la (2) se deduce

$$j\,\frac{\partial w}{\partial y} = j\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} , \qquad [3]$$

y sumando miembro a miembro las igualdades (1) y (3); se tiene

$$\frac{\partial w}{\partial x} \pm j\,\frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial v}{\partial y}\right) \pm \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) j ,$$

correspondiéndose los signos superiores e inferiores.

[1] La ecuación (a) del número anterior, se puede obtener también inmediatamente partiendo de esta relación.

Teniendo en cuenta estas dos últimas relaciones la fórmula (1) del número anterior; se puede escribir

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + j\frac{\partial w}{\partial y}\right) \pm \frac{1}{2}e^{-2j\varphi}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - j\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

19. *Fórmula isotropa.* — Supongamos ahora que la función $f(z)$ esté dada en su forma isótropa

$$w = f(z) = j_1 P(z', z'') + j_2 Q(z', z'')$$

con

$$z = j_1 z' + j_2 z''.$$

Si el incremento: $\Delta z = j_1 \Delta z' + j_2 \Delta z''$ no es un divisor de cero; se tiene

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{j_1 \Delta P + j_2 \Delta Q}{j_1 \Delta z' + j_2 \Delta z''} = \frac{\Delta P}{\Delta z'} j_1 + \frac{\Delta Q}{\Delta z''} j_2 \qquad [1]$$

Si las funciones P y Q de las variables reales z', z'', son diferenciables; se tiene

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial z'}\Delta z' + \frac{\partial P}{\partial z''}\Delta z'' + R \quad , \quad R = \varepsilon'\Delta z' + \varepsilon''\Delta z''$$

$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial z'}\Delta z' + \frac{\partial Q}{\partial z''}\Delta z'' + R \quad , \quad R_1 = \varepsilon_1'\Delta z' + \varepsilon_1''\Delta z''$$

donde R y R_1 son infinitésimos con $(\Delta z', \Delta z'')$.

Substituyendo estos valores en la (1), resulta

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \left(\frac{\partial P}{\partial z'} + \frac{\partial P}{\partial z''}\frac{\Delta z''}{\Delta z'}\right) j_1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial z'} \cdot \frac{\Delta z'}{\Delta z''} + \frac{\partial Q}{\partial z''}\right) j_2 +$$

$$+ \left(\varepsilon' + \varepsilon''\frac{\Delta z''}{\Delta z'}\right) j_1 + \left(\varepsilon_1'' + \varepsilon_1'\frac{\Delta z'}{\Delta z''}\right) j_2 ;$$

y haciendo tender $|\Delta z| \longrightarrow 0$, de modo que

$$\frac{\Delta z''}{\Delta z'} = m \qquad \therefore \qquad \frac{\Delta z'}{\Delta z''} = \frac{1}{m}$$

se tiene

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_m = \left(\frac{\partial P}{\partial z'} + \frac{\partial P}{\partial z''}\, m\right) j_1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial z'}\,\frac{1}{m} + \frac{\partial Q}{\partial z''}\right) j_2$$

$$= \left(j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''}\right) + \left(j_1 \frac{\partial P}{\partial z''}\, m + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z'}\,\frac{1}{m}\right).$$

y finalmente

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_m = \left(j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''}\right) + \left(j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z'}\right)\left(m j_1 + \frac{1}{m} j_2\right)$$

que define la derivada radial de la función (1) en un punto z.

Esta derivada es independiente de m, si se verifica la identidad

$$j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z'} \equiv 0$$

es decir

$$\frac{\partial P}{\partial z''} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial z'} = 0$$

que son las condiciones de monogeneidad hiperbólica, en la forma isótropa.

La derivada está dada, en este caso por la expresión

$$\frac{dw}{dz} = j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''} \,.$$

y la función $f(z)$, toma la forma particular

$$w = f(z) = j_1 A(z') + j_2 B(z'') \,.$$

20. *Derivada areolar y simétrica.* — Dada la función polígena hiperbólica,

$$w = f(z) = j_1 P(z', z'') + j_2' Q(z', z'') \,,$$

llamaré *derivada areolar hiperbólica* a la expresión

$$D f(z) = j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''}$$

y *derivada simétrica hiperbólica* a

$$\overline{D} f(z) = j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} \,.$$

Según esto, la derivada radial de w, resulta

$$\left(\frac{dw}{dz}\right) = \overline{D}\, m + \left(m j_1 + \frac{1}{m}\, j_2\right) D\, w\,.$$

relación que liga a estos tres derivadas.

Si

$$D w = 0\,,$$

la función w es monógena, y recíprocamente; por tanto, las funciones monógenas juegan el papel de constantes a los efectos de la derivación areolar.

Puesto que

$$f(z) = u(x,y) + j\, v(x,y) = j_1 P(z', z'') + j_2 Q(z', z'')$$

donde

$$P = u + v, \quad Q = u - v$$

$$x = \frac{1}{2}(z' + z''), \quad y = \frac{1}{2}(z' - z'')$$

se tiene

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial z''} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z'} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array}\right. \qquad [1]$$

Por tanto

$$D w = j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z'} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right] j_1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right] j_2\,,$$

es decir,

$$D w = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) j\right] = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - j\,\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Del mismo modo, resulta

$$\overline{D}w = j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right] j_1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right] j_2$$

es decir

$$\overline{D}w = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) j\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + j\,\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Según esto, la fórmula que da la derivada radial de una función polígena en su forma normal; se puede escribir

$$\left(\frac{dw}{dz}\right) = \overline{D}w \pm Dw \,.\, e^{-2j\varphi}\,.$$

De la condición de monogeneidad

$$\frac{\partial P}{\partial z''} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial z'} = 0$$

la (1) del número anterior nos da

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0\,.$$

21. *Funciones polígenas analíticas.* — Introduciendo al mismo tiempo que la variable z, su conjugada $\overline{z}$, las expresiones de la derivada areolar, simétrica y radial, toman una forma simple. En efecto; de

$$z = x + jy \quad , \quad \overline{z} = x - jy$$

se deduce

$$x = \frac{1}{2}(z + z)\,, \qquad j = \frac{1}{2_j}(z - z')\,.$$

por tanto, toda función

$$w = f(z) = (x, y) + j\,v\,(x, y)$$

resulta con esta substitución, una función de z y de $\overline{z}$.

Se tiene

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + j\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}j\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}j + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)j\right]$$

es decir

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial z} = \overline{D}w}$$

Así mismo; tenemos

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} + j\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}j\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right)j\right]$$

es decir

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = Dw$$

La derivada areolar hiperbólica coincide con la derivada parcial de w respecto a $\overline{z}$, mientras que la derivada simétrica hiperbólica coincide con la derivada parcial de w respecto de z.

Según lo anterior, la derivada radial está dada por ésta nueva expresión

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{\varphi} = \frac{\partial w}{\partial z} \pm e^{-2j\varphi}\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}$$

El cálculo de la derivada areolar y simétrica de una suma, producto, etc. de dos o más funciones se obtiene muy simplemente teniendo presente los resultados del número anterior.

En efecto

$$D(w_1 \pm w_2) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(w_1 \pm w_2) = \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}} = Dw_1 + Dw_2$$

$$D(w_1 \cdot w_2) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(w_1 \cdot w_2) = w_1 \frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}} + w_2 \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}}$$

$$= w_1 Dw_2 + w_2 Dw_1$$

$$D\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = \frac{w_1 Dw_2 - w_2 Dw_1}{w_2^2}$$

siempre que w_2 no sea divisor de cero o igual a cero.

Fórmulas análogas se obtienen para la derivada simétrica $\bar{D}w$.

22. *Derivación sucesiva.* — La derivada areolar de una función $f(z)$ es una nueva función de x e y, la cual a su vez, puede admitir una derivada areolar (simétrica) hiperbólica, la cual, siendo una nueva función, puede tener a su vez una derivada areolar (simétrica) hiperbólica y así siguiendo. Estas derivadas sucesivas las anotaremos con los símbolos

$$Df \quad , \quad D^2 f \quad , \quad D^n f \ldots$$

y

$$\bar{D}f \quad , \quad \bar{D}^2 f \quad , \quad \bar{D}^n f \ldots$$

Se tiene también,

$$Df = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

$$D^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{2^2}\left[\frac{\partial w}{\partial x} - j\frac{\partial w}{\partial y}\right]^{(2)}$$

. . . . . .

$$D^n w = \frac{\partial^n w}{\partial \bar{z}^n} = \frac{1}{2^n}\left[\frac{\partial w}{\partial x} - j\frac{\partial w}{\partial y}\right]^{(n)}$$

y del mismo modo

$$\bar{D}\, w = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial x} - j\frac{\partial w}{\partial y}\right]$$

$$\bar{D}^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{2^2}\left[\frac{\partial w}{\partial x} - j\frac{\partial w}{\partial y}\right]^{(2)}$$

$$\bar{D}^n w = \frac{\partial^n w}{\partial z^n} = \frac{1}{2^n}\left[\frac{\partial w}{\partial x} - j\frac{\partial w}{\partial y}\right]^{(n)}$$

siempre que u y v admitan las derivadas parciales hasta las de orden n^{esima}.

Las derivadas radiales sucesivas se definen del mismo modo; se tiene

$$\left(\frac{d^n w}{dz^n}\right)_\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial z} \pm e^{-2j\varphi}\,\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^{(n)} w\,.$$

Cuando las derivadas areolar y simétrica, están dadas en su forma isótropa

$$Dw = j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z'}$$

$$\overline{D}w = j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''}\,,$$

las derivadas sucesivas se calculan del siguiente modo. Pongamos

$$Dw = j_1 P_1 + j_2 Q_1$$

se tiene

$$D\,(Dw) = D^2 w = j_1 \frac{\partial P_1}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q_1}{\partial z'}$$

$$= j_1 \frac{\partial^2 P}{\partial z''^2} + j_2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z'^2}\,.$$

En general, para la derivada areolar n^{esima}

$$D^n w = j_1 \frac{\partial^n P}{\partial z''^n} + j_2 \frac{\partial^n Q}{\partial z'^n}$$

Del mismo modo; se tiene

$$\overline{D}^n w = j_2 \frac{\partial^n P}{\partial z'^n} + j_2 \frac{\partial^n Q}{\partial z''^n}\,;$$

siempre que sus componentes P y Q admitan las derivadas parciales respecto de z' y z'' hasta el orden n^{esima}.

23. *Derivada radial según dos direcciones.* — La derivadara radial $\left(\frac{dw}{dz}\right)_m$ de una función $f(z)$ es una nueva función de z la cual a su vez puede tener una derivada radial, según la dirección m' (diferente o no

de la m). Cuando exista ésta derivada la indicaremos con la notación

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^{(2)}_{m,n'}$$

Subsiste el siguiente teorema evidente.

El orden de derivación sucesiva de una función w según dos diserciones dadas m y m' no altera el valos de la derivada.

En efecto se tiene

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_m = \frac{\partial f}{\partial z} \pm e^{-2j\varphi}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f_1(z, \bar{z})$$

y aplicando esta misma fórmula a la función f_1 resulta

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{(2)}_{m,m'} = \frac{\partial f_1}{\partial z} \pm e^{-2j\varphi'}\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} + e^{-2j\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}\,\partial z} +$$

$$+ e^{-2j\varphi'}\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial \bar{z}} + e^{-2j(\varphi+\varphi')}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2}$$

es decir

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{(2)}_{m,m'} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + (e^{-2j\varphi} + e^{-2j\varphi'})\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}\,\partial z} + e^{-2j(\varphi+\varphi'}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2}$$

De la simetría de ésta relación con respecto de los parámetros φ y ε' se deduce que

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{(2)}_{m,m'} = \left(\frac{df}{dz}\right)^{(2)}_{m',m}$$

Este resultado se puede igualmente generalizar al caso de varias direcciones dadas m, m_1, ... m_p.

24. Vamos a generalizar los resultados anteriores, determinando, la derivada radial de una función polígena de $z = x + jy = z'j_1 + z''j_2$

$$W = U(x, j) + V(x, j)\,j = j_1 P(z', z'') + j_2 Q(z', z'')$$

con respecto a otra función polígena

$$w = u(x, j) + v(x, j)\,j = j_1 p(z', z'') + j_2 q(x, y)$$

La derivada radial, tiene por expresión

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)_m = \frac{\left(\frac{dW}{dz}\right)_m}{\left(\frac{dw}{dz}\right)_m}$$

$$= \frac{\left(j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''}\right) + \left(m j_1 + \frac{1}{m} j_2\right)\left(j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z'}\right)}{\left(j_1 \frac{\partial p}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial q}{\partial z''}\right) + \left(m j_1 + \frac{1}{m} j_2\right)\left(j_1 \frac{\partial p}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial q}{\partial z'}\right)}$$

siempre que los complejos hiperbólicos

$$j_1 \frac{\partial p}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial q}{\partial z''} \quad , \quad j_1 \frac{\partial p}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial q}{\partial z'}$$

no sean divisores de cero de la *misma especie.*

Se tiene entonces

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)_m = \frac{\overline{D}W + \left(m j_1 + \frac{1}{m} j_2\right) D\,W}{\overline{D}w + \left(m j_1 + \frac{1}{m} j_2\right) Dw} .$$

Del mismo modo, resulta

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)_m = \frac{\overline{D}W + e^{-2j\varphi}\, DW}{\overline{D}w + e^{-2j\varphi}\, Dw} .$$

Si la función w es monógena; se tiene

$$Dw = 0$$

luego, las anteriores, dan

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)_m = \frac{\overline{D}W}{\overline{D}w} + \left(m j_1 + \frac{1}{m} j_1\right) D\,W$$

y

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)_m = \frac{DW}{\overline{D}w} + e^{-2j\varphi} \,.\, DW$$

En particular, para: $w = x + jy = z' j_1 + z'' j_2$ resultan, las fórmulas dadas anteriormente.

Llamaremos *jacobiano* de las funciones (1) y (2), al determinante funcional

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial (W, w)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial (W, w)}{\partial (z', z'')}$$

Se tiene además que,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + j \frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + j \frac{\partial V}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial W}{\partial z'} = j_1 \frac{\partial P}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z'} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial z''} = j_1 \frac{\partial P}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial Q}{\partial z''}$$

y expresiones análogas para la función w.

Según esto, las expresiones normal e isótropa de J es por tanto

$$\frac{\partial (W, w)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial (V, u)}{\partial (x, y)} + \frac{\partial (V, v)}{\partial (x, y)} + j \left[\frac{\partial (U, v)}{\partial (x, j)} + \frac{\partial (V, u)}{\partial (x, y)} \right] \quad [1]$$

y

$$\frac{\partial (W, w)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial (W, w)}{\partial (z', z'')} = j_1 \frac{\partial (P, p)}{\partial (z', z'')} + j_2 \frac{\partial (Q, q)}{\partial (z', z'')} \quad . \quad [2]$$

25. La derivada radial de una función W, respecto de otra función w, es función de z y de la dirección m. El teorema que sigue, prueba bajo que condiciones, esta derivada es independiente de m.

La condición necesaria y suficientel para que la derivada $\left(\frac{dw}{dw} \right)_m$ *sea independiente de m, es que el jacobiano de las funciones W y w sea nulo, supuesto que los complejos*

$$\overline{D} w = j_1 \frac{\partial p}{\partial z'} + j_2 \frac{\partial q}{\partial z''} \quad , \quad D w = j_1 \frac{\partial p}{\partial z''} + j_2 \frac{\partial q}{\partial z'}$$

no *sean divisores de cero de la misma especie.*

En efecto; se tiene

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)_m = \frac{\left(j_1\frac{\partial P}{\partial z'} + j_2\frac{\partial Q}{\partial z''}\right) + \left(mj_1 + \frac{1}{m}j_2\right)\left(j_1\frac{\partial P}{\partial z''} + j_2\frac{\partial Q}{\partial z'}\right)}{\left(j_1\frac{\partial p}{\partial z'} + j_2\frac{\partial q}{\partial z''}\right) + \left(mj_1 + \frac{1}{m}j_2\right)\left(j_1\frac{\partial p}{\partial z''} + j_2\frac{\partial q}{\partial z'}\right)}$$

$$= \frac{j_1\left[\frac{\partial P}{\partial z'} + m\frac{\partial P}{\partial z''}\right] + j_2\left[\frac{\partial Q}{\partial z''} + \frac{1}{m}\frac{\partial Q}{\partial z'}\right]}{j_1\left[\frac{\partial p}{\partial z'} + m\frac{\partial p}{\partial z''}\right] + j_2\left[\frac{\partial q}{\partial z''} + \frac{1}{m}\frac{\partial q}{\partial z'}\right]}$$

de donde

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)_m = \frac{\frac{\partial P}{\partial z'} + m\frac{\partial P}{\partial z''}}{\frac{\partial p}{\partial z'} + m\frac{\partial p}{\partial z''}}j_1 + \frac{\frac{\partial Q}{\partial z''} + \frac{1}{m}\frac{\partial Q}{\partial z'}}{\frac{\partial q}{\partial z''} + \frac{1}{m}\frac{\partial q}{\partial z'}}j_2. \quad [1]$$

La condición necesaria y suficiente para que la expresión (1), sea independiente de m, es que sus componentes sean independientes de m; deben por tanto, verificarse las condiciones siguientes

$$\frac{\partial(P,p)}{\partial(z',z'')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial z'} & \frac{\partial P}{\partial z''} \\ \frac{\partial p}{\partial z'} & \frac{\partial p}{\partial z''} \end{vmatrix} = 0, \frac{\partial(Q,q)}{\partial(z',z'')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial z''} & \frac{\partial Q}{\partial z'} \\ \frac{\partial q}{\partial z''} & \frac{\partial q}{\partial z'} \end{vmatrix} = 0 \quad [2]$$

Teniendo presente, que

$$\frac{\partial(W,w)}{\partial(z',z'')} = \frac{\partial(P,p)}{\partial(z',z'')}j_1 + \frac{\partial(Q,q)}{\partial(z',z'')}j_2$$

y según las relaciones (2); resulta finalmente

$$\frac{\partial(W,w)}{\partial(z',z'')} = 0.$$

También se puede probar este teorema partiendo de la fórmula

$$\left(\frac{\partial W}{d w}\right)_m = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x} + j\,\dfrac{\partial V}{\partial x} + m\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} + j\,\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)}{\dfrac{\partial u}{\partial x} + j\,\dfrac{\partial v}{\partial x} + m\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + j\,\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)} \qquad [4]$$

que tiene sentido, cuando los complejos hiperbólicos

$$\frac{\partial u}{\partial x} + j\,\frac{\partial v}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} + j\,\frac{\partial v}{\partial y}$$

no son divisores de cero de la misma especie.

Las condiciones necesaria y suficiente para que ella sea independiente de m, es por tanto

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x} + j\,\dfrac{\partial V}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial x} + j\,\dfrac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial y} + j\,\dfrac{\partial V}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial y} + j\,\dfrac{\partial v}{\partial y}} \qquad [6]$$

de donde resulta, igualando las primeras y las segundas componentes, de ambos miembros, que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\,(U, u)}{\partial\,(x, y)} = -\dfrac{\partial\,(V, v)}{\partial\,(x, y)} \\ \dfrac{\partial\,(U, v)}{\partial\,(x, y)} = -\dfrac{\partial\,(V, u)}{\partial\,(x, y)}\,, \end{cases} \qquad [6]$$

y teniendo presente estas relaciones, la (1) del número anterior, nos da

$$\frac{\partial\,(W, w)}{\partial\,(x, y)} = 0\,.$$

26. Funciones holomorfas. — La función compleja

$$w = f\,(z) = u\,(x, y) + j\,v\,(x, y)$$

de la variable compleja hiperbólica $z = x + jy$ es *función holomorfa* en un dominio simplemente conexo D, si ella es uniforme contínua y monógena en todos los puntos interiores de D.

Estas funciones forman por tanto una clase especial dentro del conjunto de las funciones polígenas y están caracterizadas por tener en cada punto z de su dominio de existencia una derivada *radial única* independiente de la dirección m y además de comportarse como *constante* a los efectos de la derivación areolar hiperbólica.

La condición necesaria y suficiente para que la $f(z)$ sea holomorfa hiperbólica en D es que se verifique en éste dominio la condición: $Df(z) = 0$, es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Estas condiciones fueron establecidas por otro camino [1].

Vamos a establecer estas condiciones de *monogeneidad* con hipótesis más generales.

TEOREMA. — *Condición necesaria y suficiente para que la función*

$$w = f(z) = u + jv$$

sea monógena hiperbólica en el punto $z = x + jy$ *del dominio* D es que las funciones reales $u(x,y)$ y $v(x,y)$ sean diferenciables y cumplan las condiciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad [2]$$

La condición es necesaria. En efecto, supongamos que $f(z)$ sea monógena y sea

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = P + jQ$$

Poniendo

$$\begin{cases} \eta(z, \Delta z) = \dfrac{\Delta w}{\Delta z} - (P + jQ) & \text{para} \quad \begin{cases} \Delta x + y \Delta y \neq 0 \\ \Delta x \neq \Delta y \end{cases} \\ \eta(z, \Delta z) = 0 \qquad \text{para} \qquad \Delta z = 0 \end{cases}$$

se tiene

$$\Delta w = (P + jQ)\Delta z + \eta \Delta z \qquad [3]$$

donde

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \eta(z, \Delta z) = 0$$

[1] DURAÑONA y VIGNAUX, *Loc. cit.*

Sea

$$\eta = \alpha + j\beta \quad , \quad \lim_{|\Delta z| \to 0} \alpha = \lim \beta = 0$$

la igualdad (3) resulta

$$\Delta w = (P + jQ)(\Delta x + j\,\Delta y) + (\alpha + j\beta)(\Delta x + j\,\Delta y) =$$
$$= (P\Delta x + Q\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y) + j(P\Delta y + Q\Delta x + \alpha\Delta y + \beta\Delta x)$$

de donde se deduce

$$\begin{cases} \Delta u = P\Delta x + Q\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \\ \Delta v = Q\Delta x + P\Delta y + \beta\Delta x + \alpha\Delta y \end{cases} \qquad [5]$$

relaciones que nos prueban la diferenciabilidad de las funciones u y v y además las condiciones (2) puesto que de la (5) resulta ser.

$$\begin{cases} P = \dfrac{\partial u}{\partial x} \quad Q = \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ Q = \dfrac{\partial v}{\partial x} \quad P = \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

La condición es suficiente. En efecto, si u y v son diferenciables y se cumplen las condiciones (2), poniendo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = Q$$

se tiene

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon\,.\,|\Delta z| \quad , \quad \lim_{|\Delta z| \to 0} \varepsilon' = 0$$
$$= P\Delta x + Q\Delta y + \varepsilon\,|\Delta z|$$

y

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon'\,|\Delta z| \quad , \quad \lim_{|\Delta z| \to 0} \varepsilon' = 0$$
$$= Q\Delta x + P\Delta y + \varepsilon'\,|\Delta z|\,.$$

De aquí resulta

$$\Delta w = (P + jQ)\,\Delta z + (\varepsilon + \varepsilon' j)\,|\,\Delta z\,|$$

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = P + Qj$$

es decir

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + k\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\,.$$

27. *Polinomio areolar.* — Dada una función holomorfa hiperbólica $h(z)$ en un dominio D propongámonos determinar una función $f(z)$ tal que

$$D f(z) = h(z)$$

Se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = h(z)$$

de donde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} = 0$$

si $h(z)$ es holomorfa.

La solución general de esta ecuación es

$$f(z) = \Phi_0(z) + \bar{z}\,\Phi_1(z)$$

donde

$$\Phi_0(z) \text{ y } \Phi_1(z)$$

son funciones holomorfas hiperbólicas.

En general, la investigación de una función $f(z)$, tal que su derivada areolar hiperbólica, de orden n^{esima}, sea igual a una función holomorfa hiperbólica, conduce a un polinomio del tipo anterior y de grado n.

(Continuará)

SOBRE LOS PUNTOS SINGULARES DE LAS FUNCIONES ANALÍTICAS

Por el Doctor CARLOS BIGGERI

Con este mismo título, (*Sobre los puntos singulares de las funciones analíticas*), en la *Revista de la Unión Matemática Argentina, Volumen II,* 1938-1939, *Número 4, página 22, aparecida en el mes de Abril de 1939,* he visto con profunda sorpresa un artículo que la Redacción de dicha Revista me atribuye. Afirmo categóricamente que no he autorizado a nadie para publicar el referido artículo. Además, no he tenido conocimiento de ese artículo sino después de haberlo leído ya publicado (pues ni siquiera he visto las correspondientes pruebas de imprenta), y publicado en forma tal como si yo lo hubiera remitido para su publicación, lo que, como ya dije, no es exacto.

En virtud de estas circunstancias, estimo necesario, *por de pronto,* dejar constancia de esto y de lo que consigno más abajo, librando al lector desinteresado e imparcial la sencilla tarea de calificar como corresponde los hechos expuestos.

Pasaré, ahora, a considerar brevemente el artículo en cuestión. En realidad, el trabajo que he publicado en los *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris, el* 14 *de Septiembre de* 1936 (presentado por el intermedio de *M. Emile Borel*), con el título *Sur les singularités des fonctions analytiques définies par des séries potentielles,* y que es el que ha servido, en parte, de base a la persona que (con fines que no me detendré a analizar en atención al respeto que me inspiran estos *Anales de la Sociedad Científica Argentina*) ha confeccionado el artículo aparecido en la *Revista de la Unión Matemática Argentina* (*Volumen II*, 1938-1939, *Número* 4, *página* 22), no dice lo que en éste último se expresa: en el artículo aparecido en la *Revista de la Unión Matemática Argentina* (*Volumen II*, 1938-1939, *Número* 4, *página* 22) se omite una condición *esencial* para la validez de uno de los teoremas contenidos en él, condición

que está *explícitamente* estipulada en mi Nota mencionada de los *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris* (*Sesión del* 14 *de Septiembre de* 1936). En efecto, en dicha Nota mía de los *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris* (*Sesión del* 14 *de Septiembre de* 1936), enuncio el siguiente teorema:

« *Théorème. — Si les trois conditions suivantes sont vérifiées:*

1°) *la partie réelle du coefficient* a_n *de la série de Dirichlet*

$$[12] \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot e^{-\lambda_n \cdot z}, \qquad [R(a_n) \equiv a'_n]$$

n'est pas négative;

2°) *la valeur principale de l'argument,* φ_n, *de* a_n (*pour* $a'_n > 0$) *est telle que*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\cos \varphi_n} = 1 ;$$

3°) *les abscisses de convergence conditionnelle et absolue de la série* [12] *sont égales; alors, le point auquel la droite de convergence de la série* [12] *coupe l'axe réel est singulier pour la fonction analytique qui définit cette série* ».

En cambio, en el artículo que la Redacción de la *Revista de la Unión Matemática Argentina* (*en Volumen II*, 1938-1939, *Número* 4, *página* 22) me atribuye, *aparece este último teorema sin imponerle a la serie de Dirichlet la tercera condición* (las abscisas de convergencia condicional y absoluta de la serie [12] son iguales), la cual es *fundamental* para la validez del teorema.

El teorema (que, más arriba, transcribí textualmente) enunciado en mi Nota de los *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris* (*Sesión del* 14 *de Septiembre de* 1936) lo *demostré* en mi trabajo *Sulle serie di Dirichlet*, publicado en el *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, 15 *Ottobre* 1937-(*XV*), *Anno XVI*, *N.°* 4, *páginas* 178-182.

La *necesidad* de la tercera condición; es decir, la *necesidad* de la igualdad de las abscisas de convergencia condicional y absoluta de la serie, [12], de Dirichlet (condición omitida en el artículo que *la Redacción de la Revista de la Unión Matemática Argentina, en Volumen II*, 1938-1939, *Número* 4, *página* 22, me atribuye), para la validez del teorema fué demostrada por el *Profesor Oskar Perron* en su trabajo *Osservazioni riguardo un teorema di C. Biggeri*, publicado en el *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, 15 *Aprile* 1937-(*XV*), *Anno XVI*, *N.°* 2, *páginas* 82-84.

ESTRUCTURAS DE ANÁGENOS

Por MISCHA COTLAR

(*Conclusión* *)

III. — Estructuras asociadas. Anágenos (2)

11. — Los anágenos (1) permiten transformar un conjunto parcialmente ordenado en una estructura fuerte; pero esta estructura no siempre es distributiva, como se ha visto en ejemplos. En este capítulo vamos a mostrar que esta estructura puede a su vez ser transformada en una estructura distributiva, pero sin conservar el principio de prolongación sino únicamente los principios de permanencia y de «totalidad». En el capítulo siguiente vamos a realizar esta transformación conservando el principio de prolongación. Nosotros usaremos de un principio análogo al de Hardy-Borel para las series sumables. A toda estructura hacemos corresponder otra asociada a ésta y definida de tal suerte que si la estructura es distributiva ella es isomorfa con su asociada (principio de permanencia). Pero mientras que en el caso de las series la serie asociada no siempre resulta sumable, en cambio la estructura asociada es siempre distributiva, aunque en ciertos casos puede degenerar en la estructura trivial compuesta por un solo elemento. De manera que, si tenemos que desarrollar una teoría determinada (p. ej. la teoría de divisibilidad) dentro de una estructura dada, y si dicha teoría exige la distributividad de la misma, es lógico que en vez de la estructura dada utilizaremos su asociada para conseguir nuestro objeto. Indicamos dos métodos:

A) Método de la composición

12. — Consideremos una estructura cualquiera (de anágenos) y sean A, B, ... subconjuntos no vacíos de la misma.

* Ver estos *Anales*, E. V - Tomo CXXVII, pág. 328 y sig.

Diremos que una familia de conjuntos no vacíos $\{A, B, \ldots\}$ es una « *subdivisión* » de la estructura si todo elemento de la estructura pertenece a uno y sólo uno de los conjuntos (componentes) de la familia; de modo que esos conjuntos son primos dos a dos. Llamemos « *subdivisión homomorfa e* » a las subdivisiones $\{A, B, \ldots\}$ tales, que sus elementos no se separan con respecto a la suma de la estructura, es decir que de $a, a' \in A$; $b, b' \in B$; $a + b \in C$ se deduce $a' + b' \in C$. Análogamente llamamos « *subdivisión homomorfa i* » a tales cuyos elementos no se separan con respecto al producto de la estructura. Llamemos simplemente « *subdivisión homomorfa* » a las subdivisiones a la vez homomorfas *e* e *i*, es decir cuyos elementos no se separan con respecto a la suma y al producto de la estructura. Dos elementos serán dichos « *unidos* » en una subdivisión cuando pertenecen a un mismo conjunto de la misma. Llamemos « *subdivisión normal homomorfa e* » o simplemente « subdivisión normal *e* » a las subdivisiones homomorfas *e* que además verifican la siguiente condición: para toda terna x, y, z los elementos $(x + y)\, z$ y $xz + yz$ son unidos. Análogamente una « *subdivisión normal i* » es una subdivisión homomorfa *i* que verifica: para todo x, y, z son unidos los elementos $(x + z)\,(y + z)$ y $xy + z$.

Es evidente que siempre existen por lo menos una subdivisión de cada uno de los tipos considerados, que es la familia compuesta de un solo componente.

Es importante hacer notar que en toda subdivisión normal *i* son unidos los elementos $(x + y)\, z$ y $xz + yz$; en efecto, por definición son unidos $xz + yz$ y $(x + yz)\,(z + yz)$; como $(x + yz)$ y $(x + y)\,(x + z)$ son unidos y como en la subdivisión *i* los productos de unidos son unidos resulta que son unidos $(x + yz)\,(z + yz)$ con $(x + y)\,(x + z)\,(z + yz) = (x + y)z$, luego son unidos $xz + yz$ y $(x + y)\, z$. Análogamente, se verá que en la subdivisión normal *e* son unidos $(x + z)\,(y + z)$ y $xy + z$.

Es obvio hacer notar que en el caso de subdivisión *i* no se puede asegurar que las sumas de unidos son unidos y en el caso de subdivisiones *e* no se puede saber si los productos de unidos son unidos.

Dadas dos o infinitas subdivisiones de cualesquiera de los tipos considerados $S_1, S_2, \ldots$ (los índices no quieren decir que sea numerable) donde $S_i = \{A_i, B_i, \ldots\}$, formemos la familia de conjuntos no vacíos compuesta por los posibles conjuntos de la forma $A_1 \times A_2 \times \ldots$ (*) menos aquellos que son vacíos. La familia así

(*) Con $A \times B$ indicamos el producto de conjuntos. En el producto escrito debe figurar un componente y sólo uno de cada una de las S_i. Por supuesto, admitimos el postulado de Zermelo.

obtenida llamemos « producto de las subdivisiones S_i » y la designamos con

$$P = S_1 \text{ o } S_2 \text{ o } \ldots = \{A_1, B_1, \ldots\} \text{ o } \{A_2, B_2, \ldots\} \text{ o } \ldots$$

Llamaremos « composición i o e » de las subdivisiones S_i, según se trate de subdivisiones i o e y la designaremos con

$$S = S_1 \overset{e}{-} S_2 \overset{e}{-} \ldots = \{A_1, B_1, \ldots\} \overset{e}{-} \{A_2, B_2, \ldots\} \overset{e}{-}, \ldots$$

o

$$S = S_1 \overset{i}{-} S_2 \overset{i}{-} \ldots = \{A_1, B_1 \ldots\} \overset{i}{-} \{A_2, \ldots\} \overset{i}{-}$$

a la subdivisión S tal que: la condición necesaria y suficiente para que dos elementos a, b sean unidos en S es que existe un número finito de elementos $a_1, \ldots a_n$, tales que en la sucesión finita $a, a_1, \ldots a_n, b$ cada elemento es unido con su consecutivo en alguna de las subdivisiones S_i.

13. — Teorema I. — Para subdivisiones de tipo cualesquiera se verifica: el producto de subdivisiones (de potencia cualquiera) es otra subdivisión del mismo tipo.

Demostración. — Supongamos que $S_i = \{A_i, B_i, \ldots\}$ son subdivisiones normales holomorfas i y $P = \{A, B, \ldots\}$ su producto. Vamos a mostrar que P es también una subdivisión normal i.

1) Todo elemento del espacio (estructura) pertenece a uno de los conjuntos A, B,... puesto que pertenece a algún componente de cada uno de los S_i, Y no puede pertenecer más que a uno, pues de lo contrario pertenecería a dos componentes diferentes de algún S_i, luego es P una subdivisión.

2) Supongamos que $a \in A$, $a' \in A$, $b \in B$, $b' \in B$, $ab \in C$ y vamos a mostrar que $a'\,b' \in C$.

Por definición de producto debe ser

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \quad B = B_1 \times B_2 \times \ldots \quad C = C_1 \times C_2 \times \ldots$$

luego a y a' pertenecen a

$$A_1, A_2, \ldots \text{ , } b \text{ y } b' \text{ a } B_1, B_1, \ldots \text{ y } a.b \text{ a } C_1, C_2 \ldots$$

Pero los S_i son subdivisiones, y de $a.b \in C_1, C_2, \ldots$ se deduce $a'\,b' \in C_1 \times C_2 \times \ldots = C$. Luego es P una subdivisión homomorfa i.

3) Consideremos los dos elementos $xy + z$ y $(x + z)(y + z)$. Estos elementos pertenecen a un mismo componente A_1 de S_1, a un mismo A_2 de S_2,... y por lo tanto al componente $A = A_1 \times \times A_2 \times \ldots$ de P, luego P es una subdivisión normal i l. q. d. d.

Teorema II. — La composiciones de subdivision es una subdivisión del mismo tipo.

Demostración. — Sean S_i las subdivisiones y S su composición. Suponemos que los S_i son subdivisiones normales y vamos a mostrar que también lo es S.

1) Por la definición misma es S una subdivisión.

2) Sean $a, a' \in A$; $b, b' \in B$; $a.b \in C$, vamos a mostrar que $a'.b' \in C$.

Por definición existe un número finito de elementos $a_1, \ldots a_n$, $b_1, \ldots b_m$ tales que en las sucesiones finitas

$$a, a_1, \ldots a_n, a' \quad [1] \qquad \text{y} \qquad b, b_1, \ldots b_m, b' \quad [2]$$

cada dos consecutivos son unidos en alguno de los S_i. Pero como los S_i son subdivisiones i resulta que en

$$a.b, a, b, \ldots a_n.b, a'b \quad \text{y} \quad a.b, a.b_1, \ldots ab_m, ab''$$

cada dos consecutivos son unidos en algún S_i, luego ab es unido con ab' en S. Pero de [1] resulta que en

$$ab', a_1 b', \ldots a_n b', a' b'$$

cada dos son unidos en algún S_i, luego ab' es unido con $a' b'$ en S, de donde resulta que ab es unido con $a' b'$ en S. Luego S es una subdivisión homomorfa i.

3) Como todo par de elementos de la forma $(x + z)(y + z)$ y $x.y + z$ son unidos en cada S_i con más razón lo serán en S. Luego es S una subdivisión normal i l. q. d. d.

Corolario. — Las subdivisiones forman una estructura muy fuertes, si convenimos que una subdivisión sigue a otra cuando cada uno de sus componentes está contenido en un componente de la otra.

De los dos teoremas demostrados se deduce que en particular el producto y la suma de subdivisiones homomorfas es una subdi-

visión homomorfa. Pero a toda subdivisión homomorfa corresponde una estructura homomorfa con la dada y, recíprocamente, a toda estructura homomorfa corresponde una subdivisión homomorfa, por lo tanto puede definirse el producto y composición de varios homomorfismos; luego los homomorfismos de una estructura forman otra estructura muy fuerte si convenimos que un homomorfismo precede a otro cuando es homomorfo de él, es decir cuando los componentes de la subdivisión correspondiente al primero contienen a los componentes de la subdivisión correspondiente del otro.

14. — Los teoremas del § anterior no solamente demuestran que el producto y composición de subdivisiones es una subdivisión, sino también demuestran la existencia de este producto o composición. Luego existe el producto de todas las subdivisiones i que será otra subdivisión i que llamamos « *subdivisión principal i* ». Análogamente se definen la « subdivisión principal *e* », la « *subdivisión principal normal i* », etc.

Ahora podemos resolver el problema de asociar a toda estructura una base e o i según lo dicho en el capítulo anterior. Para fijar ideas nos ocuparemos de la base e. Para ello introducimos previamente unas definiciones más.

Dos elementos se dirán « *equivalentes e* » si son unidos en la « subdivisión principal *normal e* », en símbolos $a \overset{e}{\equiv} b$.

De la definición de subdivisiones normales e resultan las siguientes propiedades:

para todo a es $a \overset{e}{\equiv} a$, de $a \equiv b \quad b \equiv c$ se deduce $a \equiv c$

de $a \overset{e}{\equiv} a_1 \quad b \overset{e}{\equiv} b_1$ se deduce $a + b \overset{e}{\equiv} a_1 + b_1$

para todo x, y, z es $(x + y)\, z \equiv xz + yz$; $(x + z)\,(y + z) \equiv x.y + z.$

Escribamos $\alpha \overset{e}{<} \beta$

cuando $\alpha + \beta \overset{e}{\equiv} \beta$. Es claro que si $\alpha \equiv \alpha_1$ es $\alpha < \alpha_1$.

Además definimos la función multiforme $D\ (\alpha\ \beta)$ que hace corresponder al par α, β el elemento $\alpha.\beta$ y todos los elementos equivalentes a éste.

Escribiendo $d = D\ (\alpha\ \beta)$ queremos expresar que d es una de las determinaciones de $D\ (\alpha\ \beta)$.

15. — Teorema III. —

1) Si $\overline{\alpha} \overset{e}{\equiv} \alpha$ es $\overline{\alpha} \overset{e}{>} D(\alpha\,\beta)$.

2) Si $\overline{\alpha} \overset{e}{\equiv} \alpha$ es $\overline{\alpha + \beta} \overset{e}{>} \alpha$.

3) Si $\alpha < \beta \quad \beta < \gamma$ es $\alpha < \gamma$.

4) Si $\gamma = D(\alpha\,\beta)$, $\gamma_1 \overset{e}{>} \gamma$, $\overline{\gamma_1} \overset{e}{\equiv} \gamma_1$

entonces existen $\alpha_1 \overset{e}{>} \alpha\ \beta_1 \overset{e}{>} \beta$ tales que $\overline{\gamma_1} = D(\alpha_1, \beta_1)$.

Demostración. —

1) Tenemos $\overline{\alpha} + D(\alpha\,\beta) \overset{e}{\equiv} \alpha + (\alpha\,\beta) = \alpha \overset{e}{\equiv} \overline{\alpha}$;
luego $\overline{\alpha} \overset{e}{>} D(\alpha\,\beta)$.

2) $\overline{\alpha} + (\alpha + \beta) \overset{e}{\equiv} \alpha + (\alpha + \beta) = \alpha + \beta$; luego $\alpha + \beta \overset{e}{>} \overline{\alpha}$.

3) Por hipótesis es $\alpha + \beta \overset{e}{\equiv} \beta \quad \beta + \gamma \overset{e}{\equiv} \gamma$;

luego $\alpha + \gamma \overset{e}{\equiv} \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \overset{e}{\equiv} \beta + \gamma \overset{e}{\equiv} \gamma$ es decir que $\alpha \overset{e}{>} \gamma$.

4) Tenemos $\gamma_1 \overset{e}{\equiv} \gamma + \gamma_1 \overset{e}{\equiv} \gamma + \overline{\gamma_1} \overset{e}{\equiv} \alpha.\beta + \overline{\gamma_1} \overset{e}{\equiv} (\alpha + \overline{\gamma_1}).(\beta + \overline{\gamma_1})$,

haciendo $\alpha_1 = \alpha + \overline{\gamma_1}\ \beta_1 = \beta + \overline{\gamma_1}$ es en virtud de 2) $\alpha_1 > \alpha \quad \beta_1 > \beta$,

luego $\gamma_1 \overset{e}{\equiv} \alpha_1\,\beta_1$ y $\overline{\gamma_1} = D(\alpha_1\,\beta_1)$ l. q. d. d.

De 3) de este teorema se deduce que la estructura es un conjunto parcialmente ordenado con respecto a la relación $\overset{e}{<}$, y de 1) y 4) que este conjunto parcialmente ordenado es una base *e* con respecto a las relaciones $\overset{e}{<}$ y $D(\alpha\,\beta)$ (§ 10).

Luego podemos formar la « estructura » asociada a esta base que será, como se ha visto, una estructura distributiva. Queda pues demostrado que a toda estructura fuerte se puede asociarle una estructura distributiva. Los principios de permanencia y de totalidad están incluídos en el siguiente teorema.

Teorema IV. — Toda estructura distributiva es isomorfa con su asociada *e*.

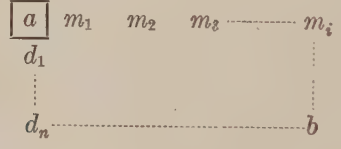
Demostración. — Puesto que la estructura es distributiva hay una subdivisión normal e tal que cada uno de sus componentes se compone de un elemento solamente; en otras palabras, los elementos de la estructura son los conjuntos de esta subdivisión. Es evidente que esta subdivisión es la principal. Luego dos elementos son equivalentes solamente si son iguales. Luego la función $D\ (\alpha\ \beta)$ es uniforme y coincide con el producto de la estructura. Lo mismo la relación $<$ coincide con la $\subset$ y la estructura es isomorfa con la asociada, como seha visto en el § 10.

B) Método de homomorfismos

16. — Aunque con el método anterior se consigue teóricamente una estructura « asociada » de acuerdo al principio de permanencia, en la práctica puede resultar muy complicada su construcción, además hay cierta ambigüedad en la elección de la base e o de la base i. Por eso a continuación vamos a darle otra forma más cómoda y directa, independiente de la teoría de la composición de anágenos.

Antes de pasar a la exposición ilustraremos la idea sobre la estructura de los números naturales, entendiendo por $a \subset b$ que a es divisor de b, por $a + b$ el mínimo común múltiple $M\ (ab)$ y por ab el máximo común divisor $D\ (ab)$.

A cada número a hacemos corresponder una disposición de todos los números naturales en forma de un « cuadro » de la siguiente manera. Sean $\{ d_n \}$ los divisores y $\{ m_k$ los múltiplos de a. Disponemos los m. en una fila y los d. en columna:



$$D\ (a, b) = d_n$$

$$M\ (a, b) = m_i$$

Ahora todo otro elemento b le colocamos en la misma fila que $D\ (a, b)$ y en la misma columna que $M\ (a, b)$. Así p. ej. si $a = 20$ se obtiene el siguiente cuadro:

20	40	60	80	100	120 ...
10		30		50	
5		15		25	
4	8	12	16		24
2		6			
1		3			etc.

(Así 25 está en la fila de $5 = D(25, 20)$ y en la columna de $100 = M(25, 20)$.

Es claro que si a es múltiplo de b cada fila del cuadro correspondiente a a está contenida en una fila del cuadro de b, mientras que las columnas del cuadro b están contenidas en las de a. Podemos, pues, considerar en vez de los números naturales sus cuadros correspondientes, diciendo que un cuadro es divisor de otro cuando sus filas (columnas) contienen (están contenidos) a las del otro, y en esta forma deducir todas las propiedades aritméticas de los números naturales.

Examinando alguno de estos cuadros veremos que en él los elementos de las filas y columnas no se separan con respecto al mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

Es decir que cada cuadro es un par de homomorfismos; uno lo forman las filas y el otro las columnas. Pero estos dos homomorfismos determinan uno al otro, puesto que están ligados por la siguiente relación fácil de verificar:

todo múltiplo de b (arbitrario) está en la misma fila que b siempre que no sea múltiplo de otro múltiplo de b que está en la misma columna que b;

todo divisor de b está en la misma columna que b siempre que no sea divisor de otro divisor de b que está en la misma fila que b.

Todo eso puede expresarse en forma abstracta como sigue.

Volvamos a las estructuras fuertes. Si $a \subset b$ diremos que c se encuentra « entre » a y b si $a \subset c \subset b$ incluídas las posibilidades $a = c$ o $b = c$. Además en adelante vamos a escribir simplemente « subdivisión » en vez de subdivisión homomorfa (es decir homomorfa e e i a la vez, pero no necesariamente normal).

17. — *Definición.* — Llamamos « *anágeno* 2 » a todo par de subdivisiones homomorfas

$$[\{A_i, B_i, \ldots\} \quad ; \quad \{A_e, B_e, \ldots\}]$$

que para todo par a, b, donde $a \supset b$, verifica las siguientes 2 condiciones:

1) Para que a y b sean unidos en $\{A_i, \ldots\}$ es necesario y suficiente que no exista ningún elemento entre ellos ($\neq b$) unido con b en $\{A_e, \ldots\}$.

2) Para que a y b sean unidos en $\{A_e, \ldots\}$ es necesario y suficiente que no exista ningún elemento entre a y b $(\neq a)$ y unido con a en $\{A_i, \ldots\}$.

Teorema V. — Sean

$$[\{A_i, \ldots\} ; \{A_e, \ldots\}] \quad \text{y} \quad [\{A_i', \ldots\} ; \{A_e', \ldots\}]$$

dos anágenos 2.

Si todo componente de $\{A_i, \ldots\}$ está contenido en un componente de $\{A_i', \ldots\}$ entonces todo componente de $\{A_e', \ldots\}$ está contenido en uno de $\{A_i, \ldots\}$.

Demostración. — Supongamos que a y b son unidos en $\{A_e', \ldots\}$ y vamos a mostrar que son también en $\{A_e, \ldots\}$. Por definición de subdivisiones es $d = a.b$ unido con a y b en $\{A_e', \ldots\}$, luego no hay ningún elemento entre a y d unido con a en $\{A_i', \ldots\}$. Como cada componente de $\{A_i, \ldots\}$ está contenido en uno de $\{A_i', \ldots\}$, con más razón no hay ningún elemento entre d y a unido con a en $\{A_i, \ldots\}$. Luego es d unido con a en $\{A_e, \ldots\}$; análogamente se verá que d es unido con b en $\{A_e, \ldots\}$ y por lo tanto lo son a y b l. q. d. d.

Basándose en este teorema podemos dar la siguiente:

Definición. — Si

$$[\{A_i, \ldots\} ; \{A_e, \ldots\}] \quad , \quad [\{A_i', \ldots\} ; \{A_e', \ldots\}]$$

son dos anágenos, diremos que el primero precede al segundo cuando los componentes de $\{A_e, \ldots\}$ están contenidos en los de $\{A_e', \ldots\}$ y los componentes de $\{A_i', \ldots\}$ están contenidos en los de $\{A_i, \ldots\}$ En símbolos

$$[\{A_i, \ldots\} ; \{A_e, \ldots\}] \subset [\{A_i', \ldots\} ; \{A_e', \ldots\}].$$

La relación $\subset$ definida cumple las propiedades necesarias para que los anágenos 2 formen un conjunto parcialmente ordenado.

18. — Vamos a mostrar que los anágenos 2 forman estructura.

Lema I. — Sea $[\{A_i, \ldots\} \{A_e, \ldots\}]$ un anágeno. Si a y b son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ y al mismo tiempo en $\{A_e, \ldots\}$ es $a = b$.

Demostración. — Sea $m = a + b$; m es unido con a y con b en $\{A_i, \ldots\}$ y en $\{A_e, \ldots\}$, pero $m \supset a$ luego hay un elemento entre a y m unido con a, lo que es únicamente posible si $m = a$. Análogamente es $m = b$ luego $a = b$.

LEMA II. — Sea $[\{A_i, \ldots\}\ \{A_e, \ldots\}]$ un anágeno y ω el producto de todos los elementos unidos con 1 (la unidad de la estructura) en $\{A_i, \ldots\}$. Entonces, para que dos elementos a y b sean unidos en $\{A_i, \ldots\}$ es necesario y suficiente que se verifique $a.\omega = b.\omega$.

Demostración. — Supongamos que a y b sonunidos en $\{A_i, \ldots\}$. Sean $\bar{\omega}$ un elemento que sigue a ω y unido con él en $\{A_e, \ldots\}$, y α_k un elemento cualquiera unido con 1 en $\{A_i, \ldots\}$. $\bar{\omega} + \alpha_k$ es unido con $\omega + \alpha_k = \alpha_k$ en $\{A_e, \ldots\}$, lo que exige $\omega + \alpha_k = \alpha_k$, puesto que también $\bar{\omega} + \alpha_k$ es unido en $\{A_i,\}$ con $\bar{\omega} + 1 = 1$ y por lo tanto con α_k; luego $\bar{\omega} \subset \alpha_k$ $\bar{\omega} \subset \omega$ $\bar{\omega} = \omega$. Así que ningún elemento que sigue a ω no es unido con él en $\{A_e,\}$, por lo tanto *es ω unido con* 1 en $\{A_i, \ldots\}$. Entonces $a.\omega$ es unido con $a.1 = a$ y análogamente $b.\omega$ con b en $\{A_i, \ldots\}$, es decir que $a.\omega$ y $b.\omega$ son unidos en $\{A_i, \ldots\}$. Pero estos elementos son unidos en $\{A_e, \ldots\}$; en efecto: $a.\omega$ es $\subset \omega$ y ω precede a todos los unidos con el $\{A_i, \ldots\}$; luego $a.\omega$ es unido con ω en $\{A_e, \ldots\}$; análogamente son unidos $b.\omega$ y ω de donde son unidos $a.\omega$ y $b.\omega$ en $\{A_e, \ldots\}$. Entonces en virtud del Lema I debe ser $a.\omega = b.\omega$. Recíprocamente si $a.\omega = b.\omega$ como $a.\omega$ es unido con $a.1 = a$ en $\{A_i, \ldots\}$ y $b.\omega$ con $b.1$ resulta que son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ a y b.

LEMA III. — La condición necesaria y suficiente para que a y b sean unidos en $\{A_e, \ldots\}$ es $a + \omega = b + \omega$.

Demostración. — Supongamos que a y b son unidos en $\{A_e, \ldots\}$. De lo visto en el lema anterior se deduce que son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ $a + \omega$ y $a + 1 = 1$; análogamente son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ $b + \omega$ y 1, luego $a + \omega$ y $b + \omega$ son unidos en $\{A_i\}$. Pero $a + \omega$ y $b + \omega$ deben ser unidos en $\{A_e, \ldots\}$, luego es $a + \omega = b + \omega$. Recíprocamente si $a + \omega = b + \omega$, son unidos a y b en $\{A_e,\}$, en efecto: $a \subset a + \omega$ y $a + \omega$ es unido con 1 en $\{A_i, \ldots\}$. Como todo ω' unido con $a + \omega$ en $\{A_i, \ldots\}$ sigue a ω, todo elemento que se encuentre entre a y $a + \omega$ y unido con $a + \omega$ en $\{A_i, \ldots\}$ es igual a $a + \omega$, luego a es unido con $a + \omega$ en $\{A_e, \ldots\}$. Análogamente b es unido con $b + \omega$, y como $a + \omega = b + \omega$, son unidos a y b en $A_e, \ldots\}$.

Teorema VI. — Sean

$$[\{A_i, \ldots\}\ \{A_e, \ldots\}] \quad \text{y} \quad [\{A_i', \ldots\}\ \{A_e', \ldots]$$

dos anágenos, y

$$\{A_i'', \ldots\} = \{A_i, \ldots\} \overset{i}{-} \{A_i', \ldots\}\ (*), \quad \{A_e'', \ldots\} = \{A_e, \ldots\}\ \text{o}\ \{A_e', \ldots\}.$$

Entonces $[\{A_i'', \ldots\}\ \{A_e'', \ldots\}]$ es un anágeno.

Demostración. — Por lo demostrado anteriormente son $\{A_i'', \ldots\}$ y $\{A_e'', \ldots\}$ subdivisiones homomorfas. Basta pues mostrar que ellas verifican las condiciones 1) y 2) de los anágenos (2). En efecto:

1) Sea $a \subset b$ y vamos a demostrar que para que a y b sean unidos en $\{A_e'', \ldots\}$ es necesario y suficiente que no exista ningún elemento entre a y b, $\neq b$ unido con b en $\{A_i'', \ldots\}$.

a) La condición es necesaria. Supongamos lo contrario, o sea que existe b, tal que $a \subset b_1 \subset b$ $b_1 \neq b$ siendo b_1 y b unidos en $\{A_i'', \ldots\}$ y a y b unidos en $\{A_e'', \ldots\}$. Entonces por definición son unidos a y b en $\{A_e, \ldots\}$ y en $\{A_e', \ldots\}$, luego son unidos $b + b_1$ y $a + b_1$ o sea b_1 *y* b *en* $\{A_e, \ldots\}$ *y en* $\{A_e', \ldots\}$. Como son unidos b y b_1 en $\{A_i'', \ldots\}$ existe por definición un número finito de elementos $c_1, \ldots c_n$, tales, que en la sucesión

$$b\ ,\ c_1\ ,\ \ldots\ c_n\ ,\ b_1$$

son unidos cada dos consecutivos, ya sea en $\{A_i, \ldots\}$ ya sea en $\{A_i', \ldots\}$. En virtud del lema II podemos hacer

$$b\,\omega = c_1\,\omega \quad ; \quad c_1\,\omega' = c_2\,\omega' \quad ;$$

$$c_2\,\omega = c_3\,\omega' \quad ; \quad \ldots\ c_n\,\omega = b_1\,\omega \quad [\text{o} \quad c_n\,\omega' = b_1\,\omega'],$$

donde ω, ω' son los elementos definidos en el lema correspondientes a los dos anágenos

$$[\{A_i, \ldots\}\ \{A_e, \ldots\}] \quad \text{y} \quad [\{A_i', \ldots\}\ \{A_e', \ldots\}].$$

De donde resulta

$$\boxed{b\,\omega\,\omega' = b_1\,\omega\,\omega'}$$

(*) Se puede utilizar indistintamente la notación $\overset{i}{-}$ o $\overset{e}{-}$, puesto que acá se trata de subdivisiones homomorfas *i* y *e* a la vez.

Escribiendo esta igualdad $(b\,\omega').\omega = (b_1\,\omega').\omega$ deducimos que $b\,\omega'$ y $b_1\,\omega'$ son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ (lema II). Pero por lo visto b y b_1 son unidos en $\{A_e, \ldots\}$, lo que da que $b\,\omega'$ y $b_1\,\omega'$ son unidos en $\{A_e, \ldots\}$, luego en virtud del lema I debe ser $b\,\omega' = b_1\,\omega'$. En virtud del lema II esta igualdad indica que b y b_1 son unidos en $\{A_i', \ldots\}$, pero por lo visto b y b_1 son unidos en $\{A_e', \ldots\}$, luego es $b = b_1$ (lema I). Llegamos a una contradicción con $b \neq b_1$.

b) *La condición es suficiente.* Si no existe ningún elemento entre a y b, $\neq b$ unido con b en $\{A_i'', \ldots\}$ con más razón no existe tal elemento unido con b en $\{A_i, \ldots\}$ ni en $\{A_i', \ldots\}$. Pero por definición de anágenos esto indica que a y b son unidos en $\{A_e, \ldots\}$ y en $\{A_e', \ldots\}$, luego lo son en $\{A''_e, \ldots$ l. q. d. d.

2) Vamos a mostrar que para que a y b sean unidos en $\{A_i'', \ldots\}$ es necesario y suficiente que no exista ningún elemento entre a y b, $\neq a$ unido con a en $\{A_e'', \ldots\}$.

a) *La condición es necesaria.* Suponemos lo contrario, o sea que a y b son unidos en $\{A_i'', \ldots\}$ y que sin embargo existe un a_1 tal que $a \subset a_1 \subset b$ $a \neq a_1$ y que a y a_1 son unidos en $\{A_e'', \ldots\}$. Entonces también son unidos a y a_1 en $\{A_e, \ldots\}$ y en $\{A_e', \ldots\}$. Como hemos visto en 1 *a*) del hecho que a y b son unidos en $\{A_i'', \ldots\}$ se deduce que $a\,\omega.\omega' = b\,\omega\omega'$. Pero $a \subset a_1 \subset b$ luego $a\omega\omega' = a_1\omega\omega'$ lo que indica (lema II) que $a\,\omega'$ y $a_1\,\omega$ son unidos en $\{A_i, \ldots\}$. Pero siendo unidos en $\{A_e, \ldots\}$ a y a_1 lo son $a\,\omega'$ y $a_1\,\omega'$, y entonces en virtud del lema I debe ser $a\,\omega' = a_1\,\omega'$. Luego a y a_1 son unidos en $\{A_i', \ldots\}$ y como lo son en $\{A_e', \ldots\}$ resulta $a = a_1$. Hemos llegado a una contradicción con $a \neq a_1$.

b) *La condición es suficiente.* En 1 *a*) hemos visto que si a y b son unidos en $\{A_i'', \ldots\}$ es necesario que sea $a\,\omega\,\omega' = b\,\omega\,\omega'$. Vamos a mostrar que esta condición es también suficiente; en efecto: En virtud del lema I tenemos que

a es unido con $a.\omega$ en $\{A_i, \ldots\}$;
$a.\omega$ unido con $a.\omega\,\omega' = b.\omega\,\omega'$ en $\{A_i', \ldots\}$;
$b.\omega.\omega'$ unido con $b.\omega$ en $\{A_i', \ldots\}$;
$b.\omega$ unido con b en $\{A_i, \ldots\}$.

luego es a unido con b en $\{A_i'', \ldots\}$. Así que $a\,\omega\,\omega' = b.\omega\,\omega'$ es necesario y suficiente para que a y b sean unidos en $\{A_i'', \ldots\}$. De acá se deduce que $\omega\,\omega'$ es unido con 1 en $\{A_i'', \ldots\}$ y que todo otro elemento unido con 1 en $\{A_i'', \ldots\}$ sigue a $\omega\,\omega'$. Entonces $a + \omega\,\omega'$ es unido con 1 en $\{A_i'', \ldots\}$ y todo elemento que sigue a a y unido con $a + \omega\,\omega'$ en $\{A_i'', \ldots\}$, sigue a $\omega\,\omega'$ y por lo tanto

a $a + \omega\omega'$. Quiere decir que no hay ningún elemento entre a y $\omega\,\omega' + a$, $\neq \omega\,\omega' + a$ y unido con $a + \omega\,\omega'$ en $\{A_i'', \ldots\}$. Luego en virtud de lo demostrado en 1 *b*) es a unido con $a + \omega\,\omega'$ en $\{A_e'', \ldots\}$. De acá son unidos $a.b = a$ y $(a + \omega\,\omega').b$ en $\{A_e'', \ldots\}$; pero $a \subset (a + \omega\,\omega')\,b \subset b$ luego por hipótesis es $(a + \omega\,\omega').b = a$ de donde $b.\omega\,\omega' = a.\omega.\omega'$ lo que según lo dicho indica que a y b son unidos en $\{A_i'', \ldots\}$ l. q. d. d.

De la misma manera se demuestra que si

$$\{A_i''', \ldots\} = \{A_i, \ldots\} \quad \text{o} \quad \{A_i', \ldots\}$$

y

$$\{A_e'', \ldots\} = \{A_e, \ldots\} \overset{e}{=} \{A_e' \ldots\}$$

es

$$[\{A_i'', \ldots\} \quad ; \quad \{A_e''', \ldots\}]$$

un anágeno. De lo dicho se deducen los dos corolarios siguientes:

Corolario I. — Los anágenos (2) forman una estructura, de modo que si

$$[\{A_i'', \ldots\}\ \{A_e'', \ldots\}] \text{ y } [\{A_i''', \ldots\}\ \{A_e''', \ldots\}]$$

son el producto y suma respectivamente de

$$[\{A_i, \ldots\}\ \{A_e, \ldots\}] \text{ y } [\{A_i', \ldots\}\ \{A_e', \ldots\}]$$

es

$$\{A_i'', \ldots\} = \{A_i, \ldots\} \overset{i}{=} \{A_i', \ldots\} \ ; \ \{A_e'', \ldots\} = \{A_e, \ldots\} \text{ o } \{A_e', \ldots\}$$

y

$$\{A_i''', \ldots\} = \{A_i\} \text{ o } \{A_i'\} \ ; \ \{A_e'''\} = \{A_e\} \overset{e}{=} \{A_e'\}$$

Corolario II. — Si $\omega\ \omega'\ \omega''\ \omega''$ son los elementos correspondientes a esos anágenos definidos en el lema II es $\omega'' = \omega.\omega'\ \omega''' = \omega + \omega'$.

19. — Teorema VII. — Los anágenos (2) forman una estructura distributiva.

Demostración. — Sean

$$[\{A_i, \ldots\}\ \{A_e, \ldots\}],\ [A_i', \ldots\}\ \{A_e', \ldots\}],\ [\{A_i'', \ldots\}\ \{A''_e, \ldots]$$

tres anágenos cualesquiera, y ω, ω_1, ω_2, los elementos definidos en el lema II, § 18, correspondientes. Basta demostrar, pues, que $(\omega + \omega_1)\,\omega_2 = \omega\,\omega_2 + \omega_1\,\omega_2$. En efecto, en virtud del lema II ω y

$\omega\,\omega_2$ como ω_1 y $\omega_1\,\omega_2$ son unidos en $\{A''_i, \ldots\}$, luego son unidos en $\{A_i'', \ldots\}$ $\omega + \omega_1$ y $\omega\,\omega_2 + \omega_1\,\omega_2$, lo que exige, en virtud del mismo lema: $(\omega + \omega_1)\,\omega_2 = (\omega\,\omega_2 + \omega_1\,\omega_2)\,\omega_2 = \omega\,\omega_2 + \omega_1\,\omega_2$ l. q. d. d.

Ahora si a toda estructura « asociamos » la estructura de sus anágenos (2), la estructura asociada será distributiva; falta, pues, solamente ver que se verifica el

Principio de permanencia. — Toda estructura muy fuerte y distributiva es isomorfa con la asociada, o sea con la de sus anágenos (2).

Demostración. — En virtud del corolario II del T. VI, § 18, a todo anágeno corresponde un elemento de la estructura. Recíprocamente a cada elemento ω de la estructura corresponde un anágeno (2); en efecto. Formemos las dos familias $\{A_i, \ldots\}$ $\{A_e, \ldots\}$ según esta ley: dos elementos a, b son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ si $a\,\omega = b.\omega$ y en $\{A_e, \ldots\}$ si $a + \omega = b + \omega$. 1) $\{A_i\}$ *es una subdivisión homomorfa*, puesto que si

$$a\,\omega = b.\omega$$

$$c\,\omega = d.\omega$$

se deduce $a.c.\omega = b.d.\omega$ y $(a + c)\,\omega = (b + d)\,\omega$. Análogamente se verá que $\{A_e\}$ es una subdivisión homomorfa. 2) Para que a y b, $a \subset b$, sean unidos en $\{A_e, \ldots\}$ es necesario y suficiente que para todo b_1 tal que $a \subset b_1 \subset b$, b y b_1 unidos en $\{A_i, \ldots\}$ sea $b_1 = b$. En efecto, si a y b son unidos en $\{A_e, \ldots\}$ es $a + \omega = b + \omega$; además $b_1\,\omega = b.\omega$; de la primera igualdad es $b_1 + \omega = b + \omega$, lo que exige (Cap. II) $b_1 = b$, luego la condición es necesaria. Ella es suficiente puesto que como $(a + b\,\omega)\,\omega = b.\omega$ es $a + b\,\omega$ unido con b en $\{A_i, \ldots\}$, y como además $a \subset a + b\,\omega \subset b$ debe ser $a + b\,\omega = b$ de donde $a + \omega = b + \omega$. luego a y b son unidos en $\{A_e, \ldots\}$. Así que $[\{A_i, \ldots\}\ \{A_e, \ldots\}]$ es un anágeno (2). Luego hay una correspondencia biunívoca entre los elementos de la estructura y sus anágenos (2), además esta correspondencia conserva la suma y producto (Corolario II), luego queda establecido el isomorfismo.

20. — Examinando las demostraciones de los teoremas relativos a los anágenos (2), se llega a la siguiente importante generalización de estos anágenos.

Consideremos una estructura muy fuerte y supongamos que en ella están definidas dos funciones $M(a, b)$ y $D(a, b)$, uniformes o no, que verifican las dos siguientes condiciones (la notación $d = D(a\,b)$ indica que d es uno de los elementos que hace corresponder la función; lo mismo se refiere a $m = M(c, d)$:

1) Si $b \subset a$ es $b = D(a, b)$; existen d y d_1 tales que $d = D(a, b)$ $d_1 = D(a, b)$ y $d \subset a$, $d_1 \subset b$.

2 Si $a \supset b$ es $b = M(a, b)$; existen m y m_1 tales que $m = M(a, b)$ $m_1 = M(a, b)$ y $m \supset a$, $m_1 \supset b$.

En semejantes estructuras se puede definir los anágenos (2) respecto a M y D como sigue. Llamamos « subdivisión homomorfa respecto a M, D » a las familias de conjuntos no vacíos y primos dos a dos, cuyos elementos no se separan respecto a M y D, es decir si A, B, C, D, son conjuntos de la familia y $a, a_1 \in A$; $b, b_1 \in B$ $D(a, b) \in C$ $M(a, b) \in D$ se deduce $D(a_1\, b_1) \in C$ $M(a_1\, b_1) \in D$ para todas las determinaciones de M y D.

Luego definimos los anágenos 2 respecto de M, D, como un par de subdivisiones homomorfas M, D que verifican las 2 condiciones de anágenos del § 17.

Todos los teoremas de los §§ 17-19 quedan ciertos para estos anágenos generalizados.

Vamos a demostrar la validez del lema II y de 1 *a*) del teorema IV y del teorema VII, que son los únicos pasajes que presentan alguna modificación esencial.

21. — *Demostración del lema II.* — Sea $\bar{\omega}$ un elemento unido con ω en $\{A_e, \ldots\}$.

Sea α_k un elemento unido con 1 en $\{A_i, \ldots\}$. $M(\bar{\omega}, \alpha_k)$ es unido con $\alpha_k = M(\omega, \alpha_k)$ en $\{A_e, \ldots\}$ y también $M(\bar{\omega}, a_k)$ es unido con $1 = M(\bar{\omega}, 1)$ y por lo tanto con α en $\{A_i, \ldots\}$. Luego (lema I) $\alpha_k = M(\bar{\omega}, \alpha_k)$ o sea $\bar{\omega} \subset \alpha_k$, $\bar{\omega} \subset \omega$. Así que ninguno de los elementos unidos con ω en $\{A_e, \ldots\}$ sigue a ω. Luego ω es unido con 1 en $\{A_i, \ldots\}$, y además ω sigue a todos los elementos unidos con él en $\{A_e, \ldots\}$ y recíprocamente. Ahora, a y $a.\omega$ son unidos en $\{A_i, \ldots\}$; en efecto, suponiendo lo contrario existe a_1 tal que $a.\omega \subset a_1 \subset a$ siendo unidos a_1 y $a.\omega$ en $\{A_e, \ldots\}$; pero $a.\omega \subset \omega$ luego $a.\omega$ y ω son unidos en $\{A_e, \ldots\}$ y por lo tanto son unidos en $\{A_e, \ldots\}$ a_1 y ω, lo que da $a_1 \subset \omega$, $a_1 \subset a$ $a_1 = a.\omega$. Análogamente se verá que son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ b y $b.\omega$. Entonces si $a.\omega = b.\omega$

son unidos a y b en $\{A_i, \ldots\}$. Recíprocamente si a y b son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ lo son $a\,\omega$ y b, pero como esos preceden a ω son unidos con ω en $\{A_e, \ldots\}$ lo que da $a.\omega = b.\omega$ (lema 1).

Demostración de 1 *a) del teorema VI.* — Todos los razonamientos hechos hasta obtener la igualdad $b\,\omega\,\omega' = b_1\,\omega\,\omega'$ se conservan. Luego $b\,\omega'$ y $b_1\,\omega$ son unidos en $\{A_i, \ldots\}$. Tenemos:

$M(b_1, b\omega')$ es unido con $b = M(b, b\omega')$ y por lo tanto con b_1 en $\{A_e, \ldots\}$.

$M(b_1, b\,\omega')$ es unido con $b_1 = M(b_1, b_1\,\omega')$ en $\{A_i, \ldots\}$.

luego $M(b_1, b\omega') = b_1$, $b_1 \supset b\,\omega'$, $b_1\,\omega' = b\omega'$.

Esta última igualdad indica que b_1 y b son unidos en $\{A_i', \ldots\}$ y como son unidos en $\{A_e', \ldots\}$ es $b_1 = b$.

Demostración del teorema VIII. — Como se demostró (lema II) es ω unido con 1 en $\{A_i, \ldots\}$ y todo elemento que precede a ω es unido con él en $\{A_e, \ldots\}$. Por lo tanto $D(\omega, \omega')$ es unido con $\omega_1 = D(1, \omega_1)$ y por lo tanto con $\omega\,\omega_1$ en $\{A_i, \ldots\}$; además $D(\omega, \omega')$ es unido con ω y por lo tanto con $\omega\,.\,\omega_1$ en $\{A_e, \ldots\}$. Luego $D(\omega, \omega') = \omega.\omega'$. Análogamente se verá que $\omega + \omega_1 = M(\omega, \omega')$. Luego en vez de $(\omega + \omega_1)\,\omega_2$ podemos escribir

$D[\omega_2\,M(\omega, \omega_1)]$ y en vez de $\omega\,\omega_2 + \omega_1\,\omega_2 = M[D(\omega, \omega_2)\,;\ D(\omega_1\,\omega_2)]$.

Pero ω es unido con $\omega\omega_2$ en $\{A_i'', \ldots\}$ y ω_1 con $\omega_2\omega_1$ en $\{A_i'', \ldots\}$ y por lo tanto $M(\omega, \omega_1)$ es unido con $M(\omega\omega_2\,;\,\omega_1\omega_2)$ en $\{A_i'', \ldots\}$ lo que da

$$D[M(\omega, \omega_1)\ ;\ \omega_2] = M(\omega\,\omega_2\,,\ \omega_1\,\omega_2]$$

o sea $$(\omega + \omega_1)\,\omega_2 = \omega\,\omega_2 + \omega_1\,\omega_2.$$

Análogamente se demuestra que

$$(\omega + \omega_2)\,(\omega_1 + \omega_2) = \omega\,\omega_1 + \omega_2.$$

De acá se deduce que los anágenos 2 *proporcionan un método eficaz para construir estructuras distributivas, puesto que es fácil encontrar funciones M, D que verifican las muy débiles condiciones* 1) *y* 2) *del* § 20.

22. — En particular se introduce la definición de anágeno 2 de una estructura respecto a otra estructura, en analogía con la definición del § 7:

Sea S una estructura muy fuerte contenida en otras dos estructuras $\overline{S}$ y $\underline{S}$ (no necesariamente fuertes) de modo que si en S es $a \subset b$ también lo es en $\overline{S}$ y en $\underline{S}$. Si a y b son dos elementos de S puede ser que el producto y suma de estos elementos en S no coincida con el producto o suma de estos elementos en $\overline{S}$ o en $\underline{S}$. Entondes definimos las funciones $M(a, b)$ y $D(a, b)$ de la siguiente manera:

$$M(a, b) = a + b \text{ (en } S)$$

si la suma $a + b$ en S coincide con la suma de estos elementos en $\overline{S}$

y $$M(a, b) = a, b$$ en el caso contrario;

$$D(a, b) = a.b \text{ (en } S)$$

si el producto de estos elementos en S coincide con él en $\underline{S}$

y $D(a, b)$ igual a a y a b en el caso contrario.

Esas definiciones verifican las condiciones 1), 2) del § 20, luego podremos formar los anágenos de S respecto a M y D que llamamos « los anágenos 2 de S respecto a $\overline{S}$ y $\underline{S}$ ».

IV. — Prolongaciones distributivas según los 3 principios

23. — En el capítulo anterior hemos mostrado que a toda estructura de anágenos se puede « asociar » otra estructura distributiva según el principio de permanencia. Pero esta asociada puede no contener a la estructura primitiva, es decir que el principio de prolongación no fué conservado en ninguno de los dos métodos indicados en el capítulo anterior. En este capítulo vamos a mostrar que combinando estos métodos con el expuesto en el § 7, Cap. I, se obtiene una asociada según los 3 principios. Los nismos métodos sirven para obtener asociadas fuertemente distributivas (*) y muy fuertemente distributivas.

(*) Una estructura es fuertemente distributiva a la izquierda si se verifica

$$(a + b + \ldots)\, m = a\, m + b\, m + \ldots$$

para infinitos $a, b, \ldots$, y a la derecha si

$$a\, b\, c \ldots + m = (a + m)\,(b + m)\,(c + m) \ldots$$

De este modo quedará demostrado que todo conjunto parcialmente ordenado puede ser ampliado con nuevos elementos hasta obtener una estructura fuertemente distributiva, y si este conjunto ordenado es él mismo una tal estructura, esta ampliación no introduce (desde el punto de vista del isomorfismo) elementos nuevos.

24. — Sean $A, B, C, \ldots$ los componentes e de anágenos (1) de un conjunto parcialmente ordenado. Como hemos visto en el Cap. I éstos forman una estructura que designamos con Σ_e, y nos proponemos ampliarla hasta obtener una estructura distributiva.

Consideremos las posibles composiciones e (Cap. II) en número finito y los posibles productos en número finito e infinito de estos anágenos de Σ_e, luego las posibles composiciones e (en número finito) y productos de los conjuntos así obtenidos y así al infinito. Sea $\overline{\Sigma}_e$ el conjunto de todos los conjuntos que pueden ser así obtenidos. $\overline{\Sigma}_e$ es evidentemente una estructura si convenimos que un conjunto de $\overline{\Sigma}_e$ sigue a otro cuando está contenido ($\leq$) en él. Además $\overline{\Sigma}_e$ contiene a Σ_e de modo que si un elemento precede a otro en Σ_e también le precede en $\overline{\Sigma}_e$.

Definición. — Sean F, F_1 dos familias (conjuntos) de anágenos e de Σ_e.

Llamamos composición respecto a $(\overline{\Sigma}_e)$ de F, F_1 y lo designamos $F * F_1$ a la familia compuesta por los anágenos de $F + F_1$ y los posibles anágenos de Σ_e que son de la forma $A_1 \overset{e}{-} A_2 \overset{e}{-} A_3 \overset{e}{-} \ldots \overset{e}{-} A_k$ donde los $A_1, \ldots A_k$ pertenecen a $F + F_1$.

Como Σ_e está contenida en $\overline{\Sigma}_e$ podemos considerar los anágenos e (1) de Σ_e con respecto a $\overline{\Sigma}_e$ (§ 7, Cap. I). Es fácil ver que estos últimos son conjuntos (familias) $\mathscr{A}$ de anágenos de Σ_e que verifican las dos siguientes condiciones:

$$\text{si} \qquad A \in \mathscr{A} \quad \text{y} \quad A_1 \supset A\,,\ A_1 \in \Sigma_e \quad \text{es} \quad A_1 \in \mathscr{A} \qquad [1]$$

$$\text{si} \quad A_1, \ldots A_k \in \mathscr{A} \ \text{y} \ C = A_1 \overset{e}{-} A_2 \overset{e}{-} \ldots A_k\,,\ C \in \Sigma_e \ \text{es} \ C \in \mathscr{A} \qquad [2]$$

En efecto, la condición [1] es evidente; vamos a demostrar la [2]. Sea $\mathscr{A}_1$ el conjunto de los elementos de $\overline{\Sigma}_e$ que preceden a todos los de $\mathscr{A}$. Por definición $A_1, \ldots A_k$ siguen a todos los de $\mathscr{A}_1$, luego C también sigue a todos los de $\mathscr{A}_1$, pero como $C \in \Sigma_e$ resulta que $C \in \mathscr{A}$.

TEOREMA I.— Si F, F_1 son dos familias de anágenos e de Σ_e que verifican las dos condiciones [1], [2], entonces la composición respecto a $\overline{\Sigma}_e$ de F, F_1 también verifica estas condiciones.

Demostración. — Sea $F_2 = F * F_1$ y vamos a mostrar que F_2 verifica [1] y [2]. La condición [2] es evidente por la definición misma de la composición con respecto a $\overline{\Sigma}_e$, basta pues ver que se verifica [1]:

Sean $A_2 \varepsilon F_2$ y $A_2' \supset A_2$, $A_2' \varepsilon \Sigma_e$.

Por definición es o $A_2 \varepsilon F$ o $A_2 \varepsilon F_1$ o $A_2 = A \overset{e}{-} B \overset{e}{-} \ldots \overset{e}{-} K$

donde $A , B , \ldots K \varepsilon F + F_1$.

Si A_2 pertenece a F o a F_1 también A_2' pertenecerá a F o F_1 y por lo tanto a F_2.

Supongamos, pues, $A_2 = A \overset{e}{-} B \overset{e}{-} \ldots \overset{e}{-} K$.

En virtud del Corolario del teorema I del Cap. II, § 9, es

$$A'_2 = A' \overset{e}{-} B' \overset{e}{-} \ldots \overset{e}{-} K'$$

donde $A' \supset A$, $B' \supset B$, $\ldots K' \supset K$ y $A' , \ldots K' \varepsilon \Sigma_e$.

Por hipótesis debe ser

$A' , B' , \ldots K' \varepsilon F + F_1$, luego $A'_2 \varepsilon F_2$ l. q. d. d.

El teorema queda cierto para un número finito cualquiera de $F, F_1, \ldots$ pero no infinito. En cambio es fácil ver que el producto finito o infinito de familias que verifican [1] y [2] también verifica estas condiciones.

Ahora consideremos los posibles anágenos (1) de $\overline{\Sigma}_e$, con respecto a $\overline{\Sigma}_e$, luego las posibles composiciones $(\overline{\Sigma}_e)$ en número finito y productos en número finito e infinito de estos anágenos y de los conjuntos que se obtienen de esta manera. Sea Σ_e' el conjunto de todos estos conjuntos. Todo conjunto $\mathscr{A}$ de Σ_e' verifica las condiciones 1) y 2) y además Σ_e' es una estructura muy fuerte si convenimos que un conjunto de Σ_e' sigue a otro cuando está contenido ($\leq$) en él. Entonces resulta el:

PRINCIPIO DE PROLONGACIÓN. — La estructura Σ_e' contiene a la Σ_e de modo que si un elemento precede a otro en Σ_e también le precede en Σ_e'.

TEOREMA II. — La estructura Σ_e' es distributiva, es decir si $\mathscr{A}, \sigma, \Gamma \in \Sigma_e'$ se verifica $(\mathscr{A} * \sigma) \times \Gamma = (\mathscr{A} \times \Gamma) * (\sigma \times \Gamma)$.

Demostración. — Sean $\mathscr{A}' = \mathscr{A} - \Gamma . \mathscr{A}$ $\sigma' = \sigma - \Gamma . \sigma$

entonces

$$(\mathscr{A} * \sigma) \times \Gamma = [(\mathscr{A}' + \Gamma . \mathscr{A}) * (\sigma' + \Gamma . \sigma] \times \Gamma =$$

$$= [(\mathscr{A}' * \sigma') + (\mathscr{A}' * \Gamma . \sigma) + (\sigma' * \Gamma . \mathscr{A}) + (\Gamma . \mathscr{A} * \Gamma . \sigma)] \times \Gamma =$$

$$= [(\mathscr{A}' * \sigma') \times \Gamma] + [(\mathscr{A}' * \Gamma \times b) \times \Gamma] + [(\sigma' * \Gamma A) \times \Gamma] +$$

$$+ [(\Gamma \mathscr{A} * \Gamma \sigma) \times \Gamma] ,$$

Entonces si A pertenece a $(\mathscr{A} * \sigma) \times \Gamma$ debe pertenecer a uno de los 4 sumandos de la última igualdad. Suponemos, por ejemplo, que A pertenece a $(\mathscr{A}' * \sigma') \times \Gamma$. Entonces es

$$A = A_1 \overset{e}{-} A_2 \overset{e}{-} \ldots \overset{e}{-} A_k ,$$

donde $A_1, \ldots A_k$ pertenecen a $\mathscr{A}' + \sigma'$.

Sea A_1 de $\mathscr{A}'$. como $A_1 \supset A$ y $A_1 \in \Sigma_e$ resulta en virtud de la condición [1] que A_1 pertenece a Γ, puesto que A pertenece a Γ, lo que contradice a $\mathscr{A}' = \mathscr{A} - \Gamma$.

De la misma manera se verá en el caso de los otros 3 sumandos que sólo es posible que A pertenezca a $(\Gamma \times \mathscr{A}) * (\Gamma \times b)$, es decir que

$$(\mathscr{A} * b) \times \Gamma \leq (\mathscr{A} \times \Gamma) * (b \times \Gamma)$$

y como también

$$(\mathscr{A} * \sigma) \times \Gamma \geq (\mathscr{A} \times \Gamma) * (\sigma \times \Gamma)$$

resulta la tesis.

Los principios de totalidad y de permanencia están incluídos en el siguiente

TEOREMA III. — Si Σ_e' es una estructura distributiva ella es isomorfa con la Σ_e'.

Demostración. — Si Σ_e es distributiva la comdosición e de dos o varios (en número finito) de sus anágenos es otro anágeno de Σ_e Luego Σ_e es isomorfa con $\overline{\Sigma}_e$ Por lo tanto los anágenos de Σ_e con

respecto a $\overline{\Sigma}_e$ son todos anágenos de Σ_e y la composición $*$ coincide con la $\overset{e}{-}$. Luego es $\overline{\Sigma}_e$ isomorfa con Σ_e' y por carácter transitivo son isomorfas Σ_e y Σ_e'.

De modo que a toda estructura de anágenos Σ_e se puede asociar una estructura distributiva según los 3 principios; esta asociada es la estructura Σ_e'.

Es claro que se llega a resultados análogos tomando en vez de Σ_e su isomorfa Σ_i de los anágenos i y utilizando en vez de la composición $\overset{e}{-}$ la $\overset{i}{-}$, etc.

25. — Vamos a indicar brevemente cómo se puede obtener un resultado análogo, utilizando en vez del método de la composición el método de anágenos (2).

Consideremos como antes las estructuras Σ_e y $\overline{\Sigma}_e$ y designemos con $A, B, \ldots$ sus elementos. A todo $A \in \Sigma_e$ hacemos corresponder dos fmilias $\{\mathscr{A}_i, \ldots\}$ y $\{\mathscr{A}_e, \ldots\}$ de subconjuntos de $\overline{\Sigma}_e$ definidas como sigue:

dos elementos

$$B, C \text{ de } \overline{\Sigma}_e \text{ son unidos en } \{A_i, \ldots\} \text{ si } B * A = C * A$$

dos elementos

$$B, C \text{ de } \overline{\Sigma}_e \text{ son unidos en } \{A_e, \ldots\} \text{ si } B \times A = C \times A$$

Sean ahora $B_1, C_1, D_1, \ldots$ elementos de Σ_e.

Si B_1 y C_1 son unidos en $\{A_i, \ldots\}$ también lo son $(B_1 \times D_1)$ y $B_1 * D_1$. En efecto tenemos por definición $B_1 * A = C_1 * A$ de donde $B_1 * D_1) * A = (C_1 * D_1) * A$, además en virtud del teorema I, § 9, Cap. II, como

$$(B_1 * A) \times D_1 = (B_1 \times D_1) * (D_1 \times A$$

resulta $\quad (B_1 \times D_1) * (D_1 \times A) = (C_1 \times D_1) * (D_1 \times A)$

de donde $\quad (B_1 \times D_1) * A = (C_1 \times D_1) * A$

Si $C_1 \subset B_1$ para que B_1 y C_1 sean unidos en $\{A_e, \ldots\}$ es necesario y suficiente que no exista ningún $D \neq B$, tal que $C_1 \subset D \subset B_1$

y unido con B_1 *en* $\{A_i, \ldots\}$. En efecto. La condición es necesaria: tenemos por hipótesis

$$B_1 \times A = C_1 \times A \quad , \quad D * A = B_1 * A \quad , \quad D \supset C_1$$

luego $$D \supset (B_1 * A) \times C_1.$$

Pero

$$(B_1 * A) \times C_1 = (B_1 \times C_1) * (C_1 \times A) = B_1 * (B_1 \times A) = B,$$

por lo tanto es $D \supset B_1$ lo que da $D = B_1$

La condición es suficiente: Haciendo $D = (B_1 * A) \times C_1$ se tiene que $C_1 \subset D \subset B_1$, y como

$$[(B_1 * A) \times C_1] * A = B_1 * (C_1 \times A) * A = B_1 * A$$

es D unido con B_1 en $\{A.,\ldots\}$; luego debe ser

$$D = B_1 \quad \text{o} \quad C_1 \times A \supset B_1$$

y como $C_1 \subset B_1$ es $C_1 \times A = B_1 \times A$ es decir que C_1 y B_1 son unidos en $\{A_e, \ldots$.

Análogamente se demuestra que si B_1, C_1 son unidos en $\{A_e, \ldots\}$ también lo son $B_1 \times D$, $B_1 * D$ y para que sean unidos en $\{A_i, \ldots\}$ es necesario y suficiente que para todo $B_1 \supset D \supset C_1$ donde D es unido con C_1 en $\{A_e, \ldots\}$ se verifica $D = C_1$.

De estas observaciones se deduce fácilmente que a todo A de Σ_e corresponde un anágeno (2) $[\iota A_i, \ldots\}\ \{A_e, \ldots]$ del tipo de los anágenos generalizados del § 20, Cap. III. Luego estos anágenos (2) proporcionan una estructura distributiva asociada según los 3 principios.

26. — Los métodos de los §§ 24, 25 sirven también para transformar toda estructura de anágenos en una estructura fuertemente y muy fuertemente distributiva. Para eso consideremos algunos preliminares.

Llamemos composición $\overset{e}{-}$ muy fuerte o fuerte (*) de infinitos conjuntos $A, B, \ldots$ y lo designamos $A \overset{e}{-} B \overset{e}{-} \ldots$ al conjunto formado por los elementos de $A + B + \ldots$ y los posibles elementos de la forma

(*) Según que se trate de una infinidad numerable o no de conjuntos.

$a\,b'\ldots$ donde $a,\ b,\ldots$ pertenecen a $A + B + \ldots$ Análogamente se define la composición i fuerte o muy fuerte.

Las mismas consideraciones hechas en el capítulo II sirven para demostrar que:

1) Si $A,\ B,\ \ldots\ M,$ son anágenos e se verifica

$$(A \overset{e}{-} B \overset{e}{-} \ldots) \times M = (A \times M) \overset{e}{-} (B \times M) \overset{e}{-} \ldots$$

2) Si $K = A \overset{e}{-} B \overset{e}{-} \ldots$ siendo $A, B, \ldots$ anágenos e y $K_1 \leq K$ es un anágeno e, entonces

$K_1 = A_1 \overset{e}{-} B_1 \overset{e}{-} \ldots$ donde A_1, B_1 son anágenos y $A_1 \leq A,\ B_1 \leq B, \ldots$

Diremos que un espacio parcialmente ordenado verifica la condición α') si la composición fuerte $\overset{e}{-}$ de anágenos $\overset{e}{-}$ es un anágeno $\overset{e}{-}$ y la condición α'') si la composición muy fuerte de sus anágenos es un anágeno.

3) Todo espacio α' (α'') es una estructura fuertemente (muy) distributiva a la izquierda y recíprocamente.

Propiedades análogas se deducen para la composición fuerte i y las estructuras fuertemente distributivas a la derecha.

27. — Sea Σ_e la estructura de los anágenos e y formemos la estructura $\overset{=}{\Sigma}_e$ que se obtiene formando las posibles composiciones fuertes e (en número infinito) y los posibles productos de anágenos y de conjuntos a su vez así obtenidos.

Definición. — Sean $F,\ F_1\ldots$ infinitos conjuntos de anágenos e de Σ_e. Llamamos composición fuerte respecto a $\overset{=}{\Sigma}_e$ de $F, F_1, \ldots$ y la designamos $F\ *\ F_1\ *\ \ldots$ al conjunto formado por todos los elementos de $F + F_1 + \ldots$ más los posibles anágenos e de Σ_e que son de la forma $A_1 \overset{e}{-} A_2 \overset{e}{-}, \ldots$ donde $A_1, A_2, \ldots$ son infinitos anágenos que pertenecen a $F + F_1 + \ldots$

Como Σ_e está contenida en $\overset{=}{\Sigma}_e$ de modo que si un elemento sigue a otro en Σ_e también le sigue en $\overset{=}{\Sigma}_e$ podemos considerar los anágenos e de Σ_e respecto a $\overset{=}{\Sigma}_e$. Es fácil ver que estos últimos son conjuntos $\mathscr{A}$ de anágenos de Σ_e que verifican:

Si $\quad A \in \mathscr{A}$ y $A_1 \supset A,\ A_1 \in \Sigma_e$ es $A_1 \in \mathscr{A}$ [1']

Si infinitos

$$A_1, A_2, \ldots \varepsilon \mathscr{A} \text{ y } C = A_1 \overset{e}{-} A_2 \overset{e}{-} \ldots, C \varepsilon \Sigma_e \text{ es } C \varepsilon \mathscr{A} \quad [2']$$

igual que en el § 24 se demuestra que si infinitos $F, F_1, \ldots$ verifican [1'] y [2'] también lo verifican $F * F_1 * \ldots$ y $F \times F_1 \times \ldots$

Ahora sea Σ_e'' la estructura formada por todos los anágenos de Σ_e respecto a $\overline{\overline{\Sigma}}_e$ y las posibles composiciones $(\overline{\overline{\Sigma}}_e)$ y productos que se puede formar con éstos y con los conjuntos así obtenidos a su vez. Repitiendo los razonamientos del § 24 se verá que Σ_e'' es fuertemente distributiva a la izquierda, y si Σ_e es ella misma fuertemente distributiva izquierda entonces son isomorfas Σ_e y Σ_e''. Como además Σ_e está contenida en Σ_e'', resulta que Σ_e'' nos proporciona una asociada fuertemente distributiva izquierda según los 3 principios.

De la misma manera se obtiene una asociada fuertemente distributiva derecha si en vez de los anágenos e y composición e utilizamos los anágenos i y composición i. Además es evidente que basta cambiar los términos fuerte en muy fuerte para obtener los mismos resultados para estructuras asociadas muy fuertemente distributivas.

Finalmente, resultados análogos se obtienen utilizando el método de anágenos (2). No vamos a insistir sobre el particular puesto que está claro el procedimiento a utilizar.

Anágenos (3). Método Kantor-Cauchy

28. — El método del § anterior permite transformar directamente una estructura muy fuerte en una structura fuertemente distributiva sin exigir que la primera sea simplemente distributiva. Pero si se tiene ya una estructura distributiva y se quiere transformarla en fuertemente distributiva es a veces más cómodo y más útil utilizar el siguiente método que llamaremos « método de los anágenos 3 » o de Kantor-Cauchy.

Consideremos una estructura fuerte y distributiva. Llamemos « anágeno e (3) » a toda sucesión infinita del tipo

$$a_1 \subset a_2 \subset a_3 \subset \ldots \subset a_n \subset \ldots$$

Definición. — Diremos que dos anágenos (3)

$$\alpha = (a_1 \subset a_2 \subset \ldots a_n \subset \ldots) \text{ y } \beta = (b_1 \subset b_2 \subset \ldots)$$

son iguales, $\alpha = \beta$ si para todo elemento K se verifica

$$a_1 K + a_2 K + \ldots + a_u . K + \ldots = b_1 K + b_2 K + \ldots b_n . K + \ldots$$

Es claro que la relación $=$ así definida es reflexiva simétrica y transitiva.

Dados dos anágenos (3) $\alpha = (a_1 \subset a_2 \subset \ldots)$ y $\beta = (b_1 \subset b_2 \subset \ldots)$ llamemos *producto* de α y β al anágeno

$$\alpha.\beta = (a_1 b_1 \subset a_2 b_2 \subset a_3 b_3 \subset \ldots)$$

y suma de α y β al anágeno

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1 \subset a_2 + b_2 \subset a_3 + b_3 \subset \ldots).$$

Teorema. IV. — Si $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$ es $\alpha.\gamma = \beta.\delta$; $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.

Demostración. — Sean

$$\alpha = (a_1 \subset a_2 \subset \ldots) \quad \beta = (b_1 \subset b_2 \subset \ldots) \quad \gamma = (c_1 \subset c_2 \subset \ldots)$$

y k un elemento cualquiera. Tenemos:

$$\alpha\gamma = (a_1 c_1 \subset a_2 c_2 \subset \ldots) \quad \beta\gamma = (b_1 c_1 \subset b_2 c_2 \subset \ldots).$$

Ahora

$$a_1 c_1 k + a_2 c_2 k + \ldots \; a_n c_n k + a_{n+1} c_{n+1} k + \ldots$$

$$\supset a_1 c_n k + a_2 c_n k + \ldots + a_n c_u k + a_{n+1} c_n k + \ldots$$

y como $\alpha = \beta$ es por definición

$$a_1 c_n k + \ldots a_n c_n k + a_{n+1} c_n k + \ldots = b_1 c_n k + \ldots b_n c_n k + \ldots$$

luego

$$a_1 c_1 k + \ldots a_n c_n k + \ldots \supset b_1 c_n k + \ldots + b_n c_n k + \ldots \supset b_n c_u k$$

y como n es cualquiera resulta

$$a_1 c_1 k + \ldots + a_n c_n k + \ldots \supset b_1 c_1 k + \ldots + b_n c_n k + \ldots;$$

pero los mismos razonamientos sirven para ver que

$$b_1 c_1 k + \ldots + b_n c_n k + \ldots \supset a_1 c_1 k + \ldots + a_n c_n k + \ldots$$

luego

$$a_1 c_1 k + \ldots a_n c_n k + \ldots = b_1 c_1 k + \ldots b_n c_n k + \ldots$$

o sea $\alpha\gamma = \beta\gamma$.

Análogamente será $\beta\gamma = \beta\delta$ y por lo tanto $\alpha\gamma = \beta\delta$.

Además

$$\alpha + \gamma = (a_1 + c_1 \subset \ldots \subset a_n + c_n \subset \ldots)$$

$$\beta + \gamma = (b_1 + c_1 \subset \ldots \subset b_n + c_n \subset \ldots)$$

y $(a_1 + c_1)\,k + \ldots + (a_n + c_n)\,k + \ldots = a_1\,k + c_1\,k + \ldots + a_n\,k + c_n\,k + \ldots =$

$= (a_1\,k + \ldots + a_n\,k + \ldots) + (c_1\,k + \ldots + c_n\,k + \ldots) =$

$= (b_1\,k + \ldots + b_n\,k + \ldots) + (c_1\,k + \ldots\ c_n\,k + \ldots\ ) =$

$= b_1\,k + c_1\,k + \ldots + b_n\,k + c_n\,k + \ldots$

$= (b_1 + c_1)\,k + \ldots\ (b_n + c_n)\,k + \ldots$

luego $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, análogamente $\beta + \gamma = \beta + \delta$

y por lo tanto $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ l. q. d. d.

Corolario. — Si $\alpha\beta = \alpha$ es $\alpha + \beta = \beta$ y recíprocamente. En efecto, en virtud de lo demostrado, es

$$\alpha + \beta = \alpha\,.\,\beta + \beta = (a_1\,b_1 \subset \ldots\ a_n\,b_n \subset \ldots) +$$

$$+ (b_1 \subset \ldots\ b_n \subset \ldots) = (b_1 \subset \ldots\ b_n \ldots) = \beta\,.$$

De la definición de producto y suma resulta además que

$$\alpha\,.\,\beta = \beta\,.\,\alpha \qquad \alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma = (\alpha)\,.\,(\beta\,.\,\gamma) \qquad \alpha\alpha = \alpha \qquad \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \qquad \alpha + \alpha = \alpha\,.$$

Luego los anágenos (3) forman una estructura si convenimos que $\alpha \subset \beta$ si $\alpha\,.\,\beta = \alpha$ (*). Esta estructura es además distributiva, como es fácil de verlo, y además contiene a la primitiva como caso particular haciendo $a = (a \subset a \subset \ldots\ a \subset \ldots)$.

Teorema V. — Sean

$$\alpha = (a_1 \subset \ldots\ a_n \subset \ldots)\ \beta = (b_1 \subset \ldots\ b_n \subset \ldots)$$

dos anágenos (3) Si a todo índice i se puede indicar un índice j tal que $a_i \subset b_j$ es $\alpha \subset \beta$.

Demostración. — Tenemos que

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1 \subset \ldots\ a_n + b_n \subset \ldots).$$

(*) Vea *Teoría de Structuras*, de Clivenko, pág. 10, y *Appendice*.

Por hipótesis a todo i se podrá hacer corresponder un j tal que $a_i + b_i \subset b_j$, luego si k es un elemento cualquiera

$$(a_1 + b_1)\, k + \ldots + (a_n + b_n)\, k + \ldots \subset b_1 k + b_2 k + \ldots + b_n k + \ldots$$

y como naturalmente es

$$(a_1 + b_1)\, k \ldots (a_n + b_n)\, k + \ldots \supset b_1 k + \ldots b_n k + \ldots$$

resulta

$$(a_1 + b_1)\, k + \ldots + (a_n + b_n)\, k + \ldots = b_1 k + \ldots + b_n k + \ldots$$

o sea $\alpha + \beta = \beta,\ \alpha < \beta$ l. q. d. d.

Teorema VI. — Dados infinitos anágenos (3) $\alpha_1, \ldots \alpha, \ldots$ existe la suma infinita de ellos, es decir existe un anágeno (3) μ tal que para todo n es $\mu \supset \alpha_n$ y si $\mu_1 \supset \alpha_n$ para todo n es $\mu \subset \mu_1$.

Demostración. — Sean $\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Evidentemente basta demostrar que existe la suma infinita $\sigma_1 + \ldots + \sigma_n + \ldots$ Sean

$$\sigma_1 = (S_1^{(1)} \subset S_2^{(1)} \subset \ldots \subset S_n^{(1)} \subset \ldots)$$

$$\sigma_2 = (S_1^{(2)} \subset S_2^{(2)} \subset \ldots \subset S_n^{(2)} \subset \ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_n = (S_1^{(n)} \subset S_2^{(n)} \subset \ldots \subset S_n^{(n)} \subset \ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De la definición de σ_n resulta que $S_n^{(i)} \subset S_n^{i+k}$, luego podemos formar el anágeno (3)

$$\mu = (S_1^{(1)} \subset S_2^{(2)} \subset S_3^{(3)} \subset \ldots S_n^{(n)} \subset \ldots).$$

En virtud del teorema anterior es $\mu \supset \sigma_n$ para todo n. Sea ahora

$$\mu_1 = (m_1 \subset \ldots m_n \subset \ldots) \quad \text{y} \quad \mu_1 \supset \sigma_n \quad \text{para todo } n.$$

Entonces para todo n y k cualeuira es

$$m_1 k + m_2 k + \ldots + m_n k + \ldots = (S_1^{(n)} + m_1)\, k + \ldots (S_n^{(n)} + m_n)\, k + \ldots$$

luego $m_1 k + \ldots + m_n k + \ldots \supset (S_n^{(n)} + m_n)\ .\ k$

para todo n, y por lo tanto

$$m_1 k + \ldots + m_n k + \ldots \supset (S_1^{(1)} + m_1) k + \ldots (S_n^{(n)} + m_n) \cdot k + \ldots$$

lo que exige

$$m_1 k + \ldots + m_n k + \ldots = (S_1^{(1)} + m_1) \cdot k + \ldots + (S_n^{(n)} + m_n) k \ldots +$$

o sea $\mu_1 = \mu + \mu_1 \quad \mu_1 \supset \mu$ l. q. d. d.

De este teorema se deduce el

Principio de totalidad. — Si $\alpha_1, \ldots \alpha_n, \ldots$ son anágenos (3) tales que $\alpha_1 \subset \ldots \subset \alpha_n \subset$ y μ un anágeno cualquiera, es

$$\alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu + \ldots + \alpha_n \mu + \ldots = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots) \mu$$

es decir que todo anágeno (3) $(\alpha_1 \subset \ldots \subset \alpha_n \subset \ldots)$ de anágenos (3) es igual al anágeno (3) $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$

Demostración. — Sean

$$\alpha_n = (a_1^{(u)} \subset a_2^{(n)} \subset \ldots a_n^{(n)} \subset \ldots) \quad \text{y} \quad \mu = (m_1 \subset \ldots \subset m_n \subset \ldots).$$

Por lo visto en el teorema IV es

$$\alpha_1 + \ldots \alpha_n + \ldots = (a_1^{(1)} \subset a_2^{(2)} \subset \ldots \subset a_u^{(n)} \subset \ldots)$$

luego

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n + \ldots) \mu = (a_1^{(1)} m_1 \subset a_2^{(2)} m_2 \subset \ldots \subset a_n^{(n)} m_n \subset \ldots)$$

y por otra parte

$$\alpha_n = \mu (a_1^{(n)} m_1 \subset a_2^{(n)} m_2 \subset \ldots a_n^{(n)} m_n \subset \ldots)$$

luego

$$\alpha_1 \mu + \ldots + \alpha_n \mu + \ldots = (a_1^{(1)} m_1 \subset a_2^{(2)} m_2 \subset \ldots a_n^{(n)} m_n \subset \ldots)$$

o sea

$$\alpha_1 \mu + \ldots + \alpha_n \mu + \ldots = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n + \ldots) \mu.$$

Teorema VII. — La estructura de los anágenos (3) es fuertemente distributiva a la izquierda, es decir para toda sucesión $\alpha_1, \ldots \alpha_n \ldots$ se verifica $(\alpha_1 + \ldots \alpha_n + \ldots) \mu = \alpha_1 \mu + \ldots$

Demostración. — Haciendo

$$\sigma_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_u \quad \text{como} \quad \sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \ldots \sigma_n \subset \ldots$$

resulta en virtud del principio de totalidad que

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots)\,\mu = (\sigma_1 + \ldots \sigma_n + \ldots)\,\mu =$$

$$= \sigma_1\,\mu + \ldots + \sigma_n\,\mu + \ldots = \alpha_1\,\mu + (\alpha_1 + \alpha_2)\,\mu + \ldots +$$

$$+ (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\,\mu + \ldots = \alpha_1\,\mu + (\alpha_1\,\mu + \alpha_2\,\mu) + \ldots$$

$$\ldots (\alpha_1\,\mu + \alpha_2\,\mu + \ldots \alpha_n\,\mu) + \ldots = \alpha_1\,\mu + \alpha_2\,\mu + \ldots$$

$$\ldots + \alpha\ \mu + \ldots \quad \text{l. q. d. d.}$$

De este teorema resulta fácilmente el

Principio de permanencia. — Toda estructura fuertemente distributiva a la izquierda es isomorfa con la estructura de sus anágenos (3).

Demostración. — Sean $(\alpha_1 \subset \alpha_2 \subset \ldots \subset \alpha_n \subset \ldots)$ un anágeno (3) de esta estructura y μ un elemento cualquiera, como

$$\alpha_1\,\mu + \ldots + \alpha_n\,\mu + \ldots = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots)\,\mu$$

resulta que por definidión es

$$(\alpha_1 \subset \ldots \subset \alpha_n \subset \ldots) = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots \subset \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots \subset \ldots) =$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

Es decir que todo anágeno (3) es igual a un elemento propio l. q. d. el teorema.

Análogamente podemos definir los anágenos *i* (3) como sucesiones $(\alpha_1 \supset \alpha_2 \supset \ldots)$ y definir que dos anágenos α, β son iguales para todo k es $(a_1 + k)\ldots (a_n + k)\ldots = (b_1 + k)\ldots (b_n + k)\ldots$ y obtener de esta manera una estructura fuertemente distributiva derecha según los tres principios.

Finalmente se puede en analogía con el método de Weirstrass considerar anágenos de la forma de un par de sucesiones

$$\alpha_1 \subset \ldots \subset \alpha_n \subset \ldots$$

$$\beta_1 \supset \ldots \supset \beta_n \supset \ldots$$

o combinar los métodos de los anágenos *i* y *e* o composiciones *i* y *e* obteniendo de esta manera estructuras fuertemente distributivas de los dos lados, pero acá nos limitaremos a lo expuesto. Resumiento lo visto en los capítulos I, II y IV resulta que

Todo conjunto ordenado, completándole con los anágenos (1), *después con el método de la composición e o i y finalmente con la composición fuerte* $\times$ *e o i o con anágenos* (3) *e o i, puede ser transformado en una estructura fuertemente distributiva a la derecha o izquierda según los* 3 *principios.*

Fe de Erratas:

Pg. 338, T. CXXVII, dice PA_1 PA_2

debe decir P no pertenece a A_1
y P no pertenece a A_2

TARIFAS FERROVIARIAS DE UTILIDAD MÁXIMA

POR EL

Ing. EMILIO REBUELTO

(Continuación)

VI. — TARIFAS KILOMETRICAS

Después de haber tratado en los capítulos anteriores las tarifas a aplicar al transporte proveniente de un punto aislado; las tarifas de precio *único* en las que no se hace intervenir la influencia de la distancia; y las de clase *única*, trataremos de estudiar los problemas de mayor compliación, originados por los tres sistemas clásicos de tarifas: kilométricas, terminales y parabólicas.

Las llamadas *kilométricas* o también *proporcionales*, fueron las primitivamente aplicadas a los transportes ferroviarios, debido a la sencillez de su formación y al hecho de aparecer como las más lógicas ante el punto de vista del público, incapacitado, como es natural, para intensificar su análisis. En estas dos razones reside la causa del constante favor y preferencia que se les ha concedido, llegando algunas opiniones hasta el extremo de considerarlas como las únicas razonables y justas. A doble distancia, doble tarifa: a triple distancia, triple tarifa, y así sucesivamente.

Esta forma de raciocinio simplista, se juzga inobjetable por la mayoría de las personas, a quienes satisface plenamente, el suponer que siendo la tarifa el precio de un servicio prestado al cargador por la empresa de transportes, no debe pagarse más que una cantidad de dinero, exacta y rigurosamente proporcional al trabajo efectivo hecho por la empresa, o sea, tal como sucede con las tarifas kilométricas, una cantidad fija por cada tn.-Km.

Se olvida, al raciocinar así, la universal costumbre de tarificar los objetos habituales de comercio, con un distinto precio por unidad, según el número total de unidades objeto de la transacción comercial. Los precios al « por mayor y al por menor », son bien conocidos.

Nadie se conforma en pagar el mismo precio por un objeto cuando compra diez o cuando se adquieren cien o más. De idéntica manera, el costo de una ton.-Km. no debería ser el mismo, si se trata de un transporte a diez o a cinco o más kilómetros. Pero con las tarifas kilométricas lo es, y por eso se llega pronto a un costo tan elevado para el transporte, que resulta prohibitivo apenas aumenta la distancia más allá de cierto límite, muy reducido, por otra parte, para las mercaderías de bajo precio. La práctica ha impuesto, pues, otros tipos de tarifas, y las kilométricas fueron paulatinamente abandonadas en el tráfico de cargas, reduciéndose su aplicación al transporte de pasajeros, a pesar de las protestas de quienes usan del ferrocarril para transportes cortos, que, en efecto, resultan encarecidos cuando se aplican otros sistemas distintos de tarifas. Se puede demostrar que las *diferenciales*, o sea las *no proporcionales* a la distancia, son más convenientes para las empresas y los intereses generales de un país, representados por el conjunto de todos los productores de la zona atravesada por el ferrocarril, y no por los ubicados solamente en los primeros kilómetros.

Sin embargo, en la época presente se asiste a un profundo cambio de opiniones, volviéndose a las kilométricas, con abandono cada vez mayor de las tarifas terminales y parabólicas. El motivo de tan fundamental modificación, hay que buscarlo en el transporte automotor por camiones, extraordinariamente desarrollado en nuestros días, con efectos competitivos sobre el ferrocarril cuya importancia crece de continuo, obligando cada vez más a tenerlos en cuenta. Y el transporte automotor emplea, de preferencia, tarifas kilométricas.

Es sabido que la lucha entre una kilométrica o proporcional y otra diferencial, cualquiera que ésta sea, se decide siempre a favor de la kilométrica, para las cortas distancias, que es precisamente la zona dentro de la cual actúan con más eficacia los autos, ómnibus y camiones empleados en el transporte caminero. La consecuencia forzosa para los ferrocarriles es la pérdida absoluta de todo tráfico que a las distancias cortas no se encuentra sujeto a tarifas kilométricas. Y aún más: como el ferrocarril debe efectuar transportes a todas las distancias, se impone que todas sus tarifas tengan iniciación kilométrica, si es que se quiere evitar la competencia de los automotores. Ya se ha dicho en varias oportunidades que las tarifas terminales y parabólicas, extendidas a todas las distancias, no son aplicables en la actualidad y debe buscarse el sustituirlas por otras de iniciación kilométrica.

Estas observaciones y algunos comentarios más que podrían agregarse sobre ellas, justifican la creciente atención dedicada ahora a las tarifas kilométricas, con las cuales esperan las empresas ferroviarias solucionar algunos de sus graves problemas de disminución de tráfico. En una palabra, son un tema de actualidad; y esta circunstancia, más que el valor real de las páginas siguientes, espero que atraiga un poco el interés de los lectores hacia las consideraciones expuestas a continuación.

Sea $y = mx$, una tarifa de tipo kilométrico: se trata de determinar el valor de m, de modo que la utilidad dejada por la tarifa sea máxima.

El ancho de la zona, a cada lado de la vía, será, de acuerdo a las notaciones ya usadas

$$y_z = \frac{v - mx}{f}$$

Para $x = \frac{v}{m}$, $y_z = 0$ y la zona terminará. Su forma resulta, pues, la de un triángulo isósceles, de base igual a $\frac{2v}{f}$, (valor de $2y_z$ para $x = 0$) y de altura $\frac{v}{m}$, (valor de x para $y_z = 0$). El área de esta zona será $\frac{v^2}{fm}$, y la producción $\frac{\gamma v^2}{fm}$. Considerándola concentrada en el centro de gravedad del triángulo, su transporte implicará un trabajo igual a

$$\frac{1}{3}\,\frac{v}{m} \cdot \frac{\gamma v^2}{fm} = \frac{\gamma v^3}{3fm^2}$$

Como se cobra m por cada ton.-Km. y la empresa suponemos que gasta g, la utilidad total será

$$U = \frac{\gamma v^3}{3fm^2}(m - g) = \frac{\gamma v^3}{3f}\,\frac{m - g}{m^2}$$

Hallando la derivada de U respecto a m e igualando a cero, se encuentra

$$\frac{m^2 - 2m(m - g)}{m^4} = 0 \quad \therefore \quad m = 2g$$

valor que sustituído en la derivada segunda la hace tomar un signo negativo: luego corresponde a la tarifa que procurará el máximo de utilidad: aquélla y éste serán, respectivamente

$$y = 2\,gx \quad ; \quad U_{max} = \frac{\gamma\, v^3}{3\,f}\,\frac{m - g}{m^2} = \frac{\gamma\, v^3}{12\,fg}$$

A este mismo resultado habíamos llegado ya en el Cap. II, *Fórmulas fundamentales*, haciendo uso de un cálculo basado en el empleo de una integral. El procedimiento ahora expuesto, mucho más sencillo y elemental, se presta para ser usado cuando deban discutirse estos problemas con personas que no posean suficientes conocimientos matemáticos para seguir aquel raciocinio.

Antes de seguir adelante, anotemos como propiedad curiosa y característica de las tarifas kilométricas, la no intervención del valor v en el importe de la tarifa a cobrar (pues ésta resultó ser $y = 2\,gx$); en consecuencia, a todas las diferentes clases de cargas, cualesquiera que sea su coeficiente de transporte, les va a corresponder igual tarifa, detalle interesante para el estudio de la competencia con el transporte automotor que tiende a emplear una o un número muy reducido de clases. Como interviene solo el valor de g, o gasto directo por ton.-Km. de peso útil, una vez determinado un *valor medio* conveniente para las diferentes cargas (aunque demanden para su transporte diverso peso bruto), se podría llegar a la fijación de una *tarifa única* para todas las cargas de un ferrocarril, y determinarla de modo que produjera la utilidad máxima.

Mejor dicho, no sería una tarifa única sino una *iniciación única* para todas las tarifas, pues más allá de cierta distancia, la tarifa se convierte en prohibitiva, limitándose su radio de acción. Aquí sí interviene el valor de v en forma tal, que se originan nuevos problemas dignos de cuidadoso estudio.

En efecto: la distancia máxima de transporte resultaría de:

$$y = mx = 2\,gx = v \quad \therefore \quad x = \frac{v}{2\,g}$$

o sea, la mitad de la distancia hasta la cual puede transportar sin pérdida la empresa. Esta conclusión es la que evidencia precisamente, la imposibilidad de atender en buenas condiciones los tráficos de largas distancias con tarifas kilométricas.

Se plantea entonces la cuestión siguiente: cuando la zona que se desea servir se extiende hasta una distancia x_0, o si la carga a la cual se va a aplicar la tarifa está a dicha distancia x_0, la tarifa deberá ser tal que $m_0 x < v$, pues v es lo más que, por hipótesis, puede pagar dicha mercadería para su transporte. De aquí sacamos $m < \frac{v}{x_0}$; pero *si este valor* $\frac{v}{x_0}$, *es menor que* $2\,g$, *la empresa obtiene con estos transportes menos utilidad que con los efectuados hasta distancias menores de* x_0. En otras palabras, no le conviene prolongar sus vías o sus servicios para satisfacer estos transportes.

Existe, pues, para cada carga (y por lo tanto, también para el conjunto de varias clases de cargas), una cierta distancia límite más allá de la cual no debe extender sus servicios ninguna empresa de transporte que tenga en vigencia tarifas kilométricas. Le es forzoso, antes, proceder a un cambio en su sistema tarifario, pues, de no hacerlo, verá disminuir, no sólo sus utilidades, sino también el interés del capital invertido, a la vez que aumentará el coeficiente de explotación, tendiendo hacia la unidad, y por lo tanto aproximándose la empresa hacia la situación de pérdida.

Pueden avaluarse estos sucesivos estados del negocio, escribiendo los valores de las utilidades, U, del interés, i y del coeficiente E en función de la distancia x hasta la cual se puede transportar con semejantes tarifas, o sea hasta que

$$y = mx = v \quad \therefore \quad m = \frac{v}{x}$$

Para este valor de m se tiene

$$U = \frac{\gamma\, v^3}{3\,f}\,\frac{m - g}{m^2} = \frac{\gamma\, v\, x\,(v - g\,x)}{3\,f}$$

Supongamos que ésta fuera la utilidad total del ferrocarril, o sea que no se transportase más que una sola clase de carga, aquella a la cual se refieren los valores de γ, v y g; o que esta clase de carga fuera a tal punto predominante sobre el total, que las utilidades dejadas por las otras resultasen despreciables. Si llamamos C al

costo de un Km. de ferrocarril, los x kilómetros costarán Cx y el interés producido por las utilidades será

$$i = \frac{U}{Cx} = \frac{\gamma\, v\,(v - gx)}{3\,fC}$$

expresión *decreciente con* x, o sea que cuanto más se prolonga la vía, más disminuye el interés del capital invertido en ella. Las utilidades alcanzan un máximo cuando

$$x = \frac{v}{2\,g}, \quad \text{para el cual} \quad U_{max} = \frac{\gamma\, v^3}{12\,fg}$$

y el interés correspondiente es

$$i = \frac{U}{Cx} = \frac{\gamma\, v^2}{6\,fC}$$

que vendría a ser el interés que produce la empresa cuando la longitud en explotación es la que produce el máximo de utilidad. Para longitudes menores, la utilidad es *menor* pero el interés es *mayor*. Para longitudes mayores, *la utilidad y el interés disminuyen.*

De la última expresión escrita para i, parece deducirse una conclusión absurda, pues para $x = 0$, resulta un cierto valor de i, que es el mayor de todos. Pero no habiendo ninguna longitud de línea en explotación, desde el momento que x es igual a cero, no es posible que exista ningún valor de i.

Este resultado no implica un defecto de las fórmulas ni de la teoría que conduce a ellas: para $x = o$, es $U = 0$, como es fácil verificarlo con la fórmula respectiva; y siendo nulas las utilidades, no hay caso de calcular ningún interés, pues éste es cero, por definición. El otro valor de x que anula las utilidades, es $\frac{v}{g}$, el que anula también el interés, de acuerdo a la fórmula para éste, la cual no debe pues, ser empleada más que para valores de x mayores de cero.

En cuanto al coeficiente de explotación, E, o relación de gastos a productos, lo calcularemos inmediatamente, dividiendo los gastos totales (que son iguales a la producción Q, por g y por la distancia del centro de gravedad, que es $\frac{1}{3}x$, por los productos; éstos se

forman con la producción Q, por la tarifa, que es igual a m por kilómetro, o sea $\frac{mx}{3}$ en total; y como $m = \frac{v}{x}$, los productos resultan $\frac{Q\,v}{3}$ y el cociente

$$E = \frac{G}{P} = \frac{Q\,g\,\frac{x}{3}}{Q\,\frac{v}{3}} = \frac{gx}{v}$$

valor que aumenta, evidentemente, al crecer x. Para la distancia que procura las utilidades máximas, se tiene

$$E = \frac{gx}{v} = \frac{g}{v}\,\frac{v}{2g} = 0{,}50$$

En estos cálculos se han tomado en cuenta solamente los gastos *directos* (que son los de Tracción y Movimiento), tal como es costumbre hacerlo cuando se estudia una tarifa aislada. Pero cuando se trata de todo el tráfico de un ferrocarril, es forzoso considerar también los gastos indirectos para deducir las utilidades, el interés y el coeficiente de explotación. Esto puede ser hecho de varias maneras.

La más sencilla consiste en utilizar, en vez del valor g, gasto *directo* por ton.-Km. útil, el valor g_1, del gasto *total* por igual unidad. En la práctica puede suponerse aproximadamente que los gastos indirectos son un 54 % de los totales, luego éstos serán el 1,85 % de los directos, porque

$$\frac{1}{54} = 0{,}0185$$

Bastará, pues, tomar 1,85 g en vez de g en todas las fórmulas anteriores y tener en cuenta las consecuencias.

Estos valores de las relaciones entre directos, indirectos y totales, varían poco en los últimos años. Según los datos de la Estadística oficial, se tiene:

FERROCARRILES ARGENTINOS

AÑO	GASTOS Directos $ oro	GASTOS Totales $ oro	Relación de totales a directos
1926	96.918.085	180.837.973	1,86
1927	104.668.897	197.006.146	1,88
1928	105.754.501	202.309.586	1,91
1929	109.501.394	206.470.155	1,88
1930	100.049.349	184.542.671	1,84
1931	95.972.109	180.641.568	1,88
1932	87.972.369	165.052.457	1,87
1933	85.153.909	159.356.685	1,87
1934	85.889.632	156.267.047	1,81
1935	87.102.360	160.649.872	1,84
Término medio	—	—	1,85

Semejante manera de incorporrar a los cálculos los gastos indirectos, no es del todo lógica, pues su monto resulta así computado proporcionalmente a los directos, o sea, proporcionalmente a la distancia recorrida por la carga, cuando se sabe que, por su naturaleza, son más bien proporcionales a la longitud de vías en servicio (gastos de vía y obras) y a las toneladas de carga recibidas y despachadas en estaciones (gastos de tráfico, personal de estaciones, administración, etc.), además de los de Dirección y Superintendencias, en ninguno de los cuales influye el recorrido. Más razonable parece, pues, hacerlos intervenir como proporcionales a las toneladas de carga, pero con un coeficiente de proporcionalidad variable según la longitud de las líneas, para tener así en cuenta los dos factores de que dependen en primer lugar. Empezaremos, pues, por dividir los gastos indirectos, G_i, por el total de toneladas útiles movidas, lo que daría un valor g_i:

$$g_i = \frac{G_i}{Q} = \frac{G_i}{\frac{\gamma v^2}{fm}} = \frac{G_i f m}{\gamma v^2}$$

$$\therefore \qquad G_i = \frac{\gamma v^2}{fm} g_i$$

Este monto de gastos, G_i, es lo que debemos restar de la utilidad calculada antes, teniendo en cuenta solamente los gastos directos:

$$U = \frac{\gamma v^3}{3f} \frac{m - g}{m^2} - G_i$$

$$= \frac{\gamma v^3}{3f} \frac{m - g}{m^2} - \frac{\gamma v^2}{fm} g_i$$

$$= \frac{\gamma v^2}{3f} \frac{(m - g) v - 3 m g_i}{m^2}$$

sustituyendo a m por su valor $\frac{v}{x}$, queda una expresión más sencilla:

$$U = \frac{\gamma vx}{3f} (v - gx - 3 g_i)$$

Derivando a U respecto a x, se podrá determinar el valor de x que conduce a un máximo de U: pero al hacerlo no debe olvidarse que g_i depende también de x, según una relación fácil de establecer: basta escribir que las utilidades son evidentemente las mismas, cualquiera que sea la hipótesis hecha para hacer intervenir los gastos indirectos; luego

$$\frac{\gamma vx (v - 1{,}85\, gx)}{3f} = \frac{\gamma vx (v - gx - 3 g_i)}{3f}$$

$$1{,}85\, gx = gx + 3 g_i$$

$$g_i = 0{,}28\, gx$$

y entonces

$$\frac{dg_i}{dx} = 0{,}28\, g$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\gamma v}{3f} \left[v - 2 gx - 3 g_i - 3 x \frac{dg_i}{dx} \right] = 0$$

$$v - 3 g_i - 2 gx - 0{,}85 gx = 0$$

$$x = \frac{v - 3 g_i}{2{,}85\, g}$$

Este valor coincide con el encontrado antes: basta sustituir a g_i por $0{,}28\, g\, x$ para encontrar

$$x = \frac{v}{2\,(1{,}85)\,.\,g}$$

Con él se pueden obtener expresiones de m y de U_{max} en las que aparezca g_i, y por lo tanto de apariencia distinta de las ya encontradas, pero idénticas, en cuanto se sustituye a g_i por su valor.

El valor de g_i en los ferrocarriles argentinos oscila alrededor de 1,35 $ m/n por tm. útil, como término medio, teniendo en cuenta para deducirlo las toneladas útiles que resultan de sumar a las cargas, equipajes y encomiendas, el peso de los pasajeros, computado cada uno como 100 Kg. para incluir el peso del equipaje libre de flete que la ley argentina permite transportar. Claro es que un análisis detallado proporcionaría la separación de los gastos indirectos relativos a cargas de los correspondientes a los pasajeros (en forma aproximada, pues lo complejo del problema no permite esperar una solución completa), obteniéndose así un valor de g_i más cercano a la realidad. A falta de este análisis, que no es del caso intentar aquí, recordamos algunas cifras estadísticas de interés sobre este punto.

FERROCARRILES ARGENTINOS

Gastos indirectos por ton. útil en $ oro

1926	1,35	1931	1,36
1927	1,32	1932	1,38
1928	1,39	1933	1,38
1929	1,40	1934	1,25
1930	1,40	1935	1,25

Término medio: 1,35

Con las fórmulas que dejamos expuestas se puede resolver el problema de averiguar hasta qué distancia conviene hacer transportes de una carga determinada: o hasta donde es aconsejable prolongar un ferrocarril en el que predomina cierta clase de carga; el ejemplo siguiente aclara la aplicación del método.

Ejemplo: Se está construyendo un ferrocarril, librando al público tramos sucesivos de 50 Km. En la zona se produce principalmente una mercadería con un coeficiente de transporte, $v = 10$ $ m/n y en una cantidad de 40 ton. por Km. cuadrado. El gasto directo de transporte por esta vía de comunicación es de 0,0107 $ m/n por ton. Km. útil, y el de los transportes transversales o radiales por caminos, de 0,35 $ m/n por igual unidad.

Se desea adoptar un sistema de tarifas kilométricas, estableciendo para las distintas longitudes que va adquiriendo la vía en servicio público, la más alta tarifa que pueda soportar el tráfico en cada caso.

Calcular los resultados de la explotación, de acuerdo a estas condiciones y tarifas, suponiendo que el costo de la vía es de 50.000 $ m/n por Km. y que se cultiva sólo el 80 % de la zona de influencia permitida por las tarifas que se van adoptando.

Cuando se libre al servicio el primer tramo de 50 Km., a esa distancia la mercadería producida en la misma punta de rieles podrá pagar 10 $ m/n, luego la tarifa será

$$y = \frac{10}{50} x = 0{,}2\, x$$

y mientras la línea no se prolongue, no habrá interés en rebajarla, pues a mayor distancia no hay todavía tráfico posible. Al incorporarse el segundo tramo de 50 Km., para traer la mercadería producida a los 100 Km., y que no puede pagar más de 10 $ m/n, se adoptará la tarifa

$$y = \frac{10}{100} x = 0{,}1\, x,$$

y así sucesivamente. En general, siendo x_0 la longitud de línea en servicio, se tendrá

$$y = \frac{10}{x_0} x$$

Las utilidades obtenidas eran

$$U = \frac{\gamma\, v\, x\, (v - gx)}{3f}$$

pero como se supone cultivada sólo el 80 % de la zona, en vez de γ tomaremos 0,8 γ; y como debemos considerar también los gastos indirectos, en vez de g adoptaremos 1,85 g, resultando entonces

$$U = \frac{0{,}8\ (40)\ (10)\ x\ [10 - 1{,}85\ (0{,}0107)\ x]}{3\ (0{,}35)} = 304\, x\, (10 - 0{,}02\, x)$$

Cuando $x = 50$, se tiene

$$U = 304\ (50)\ (10 - 1) = 136.800\ \$\ \text{m/n}.$$

Para $x = 100$ resultará

$$U = 304\ (100)\ (10 - 2) = 243.200\ \$\ \text{m/n}$$

etc.

Como el costo de la vía por Km. es de 50.000 $ m/n el interés producido por el negocio en los primeros 50 kilómetros será

$$i = \frac{136.800}{50.000\ (50)} = 0{,}0547$$

o sea un 5,47 %. En general

$$i = \frac{0{,}8\ \gamma\ v\ (v - 1{,}85\ gx)}{3\ fC} = \frac{0{,}8\ (40)\ (10)\ (10 - 0{,}02\ x)}{3\ (0{,}35)\ 50.000} =$$

$$= 0{,}0608\ (10 - 0{,}02\ x)$$

y en cuanto al coeficiente de explotación

$$E = \frac{1{,}85\ gx}{v} = \frac{0{,}02\ x}{10} = 0{,}002\ x$$

Con estas fórmulas se calcula fácilmente el cuadro que sigue:

RESULTADOS DE UNA EXPLOTACIÓN CON TARIFAS KILOMÉTRICAS

Longitud de la línea km.	Tarifa aplicada	Utilidades totales $ m/n	Interes obtenido %	Coeficiente de Explotación
50	0,20 x	136.800	5,47	0,10
100	0,10 x	243.200	4,86	0,20
150	0,06 x	319.200	4,25	0,30
200	0,05 x	364.800	3,64	0,40
250	0,04 x	380.000 (Máx.)	3,04	0,50
300	0,03 x	364.800	2,43	0,60
350	0,028 x	319,200	1,82	0,70
400	0,025 x	243.200	1,21	0,80
450	0,022 x	136.800	0,60	0,90
500	0,020 x	0	0,00	1,00

El interés más elevado, es el que se obtiene con la explotación de los 50 primeros kilómetros. Al prolongar la línea, los nuevos capitales ganan cada vez un interés menor, pero como las utilidades totales aumentan, sería aconsejable continuar la construcción hasta los 250 Km. por lo menos, distancia a la cual se obtiene una ganancia máxima de 380.000 $ m/n, que para un capital invertido de 12.500.000 pesos moneda nacional representa un interés de 3,04 %. Si se continúa construyendo la línea más allá de este punto, las ganancias disminuyen, y como el capital aumenta, el interés obtenido decrece rápidamente.

En la práctica puede presentarse el caso de que existan dos o más clases de cargas con igual importancia relativa. Cada una de ellas obligaría a detener el transporte a distancia distinta para obtener la respectiva utilidad máxima.

Pero si se quiere hacer posibles los transportes de todas las cargas hasta punta de rieles, habrá que buscar si no existe una distancia intermedia susceptible de proporcionar mayores utilidades.

Este problema, de gran interés práctico, se plantea y resuelve fácilmente en teoría, pero en la realidad obliga a un análisis muy cuidadoso y a una discusión de las diferentes soluciones posibles, que no son siempre las que a priori se espera encontrar.

Sean v_1, v_2... y en general v_n los coeficientes de transporte de las varias cargas: sean igualmente γ_n y g_n la producción por Km. cuadrado y el costo directo del transporte ferroviario por ton.-Km. de peso útil: 1,85 g_n será el gasto total. La suma de las diferentes utilidades será

$$U = \frac{\gamma_1 v_1 x (v_1 - 1{,}85\, g_1 x)}{3f} + \frac{\gamma_2 v_2 x (v_2 - 1{,}85\, g_2 x)}{3f} + \dots$$

$$= \frac{1}{3f} \Sigma\, \gamma_n v_n x (v_n - 1{,}85\, g_n x)$$

Derivando con respecto a x,

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{3f} \Sigma\, \gamma_n v_n (v_n - 3{,}70\, g_n x)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{1{,}23}{f} \Sigma\, \gamma_n v_n g_n$$

La segunda derivada es evidentemente negativa, luego existe un máximo de la utilidad que se producirá para la distancia deducida de

$$\Sigma\, \gamma_n v_n (v_n - 3{,}70\, g_n x) = 0$$

$$x = \frac{\Sigma\, \gamma_n v_n^2}{3{,}70\, \Sigma\, \gamma_n v_n g_n}$$

Encontrada así la distancia, determinaremos las tarifas respectivas, que serán:

$$y_1 = \frac{3{,}70\, v_1\, \Sigma\, \gamma_n v_n g_n}{\Sigma\, \gamma_n v^2}\, x$$

$$y_2 = \frac{3{,}70\, v_2\, \Sigma\, \gamma_n v_n g_n}{\Sigma\, \gamma_n v_n^2}\, x$$

. . . . . .

Todas ellas serán distintas, pero todas serán aplicables hasta la misma distancia, y en su conjunto producirán la utilidad máxima, cuyo monto será calculado de inmediato, sustituyendo el valor de x en la fórmula respectiva.

En esta forma se puede establecer el *sistema de tarifas kilométricas* más convenientes para un ferrocarril, de acuerdo a las clases de cargas que transporta, a la cantidad de toneladas de cada clase y a los diversos gastos que cada una origina, o sea, haciendo intervenir todos los elementos característicos del tráfico, por más heterogéneos, complejos y numerosos que sean. A continuación se detalla la solución de un caso en el que intervienen dos clases de cargas.

Ejemplo: Los mismos datos del ejemplo anterior, pero considerando que además de la carga allí supuesta, que llamaremos « carga A », se transporta otra, « carga B », para la cual

$$v = 15 \text{ \$ m/n}; \quad \gamma = 30 \text{ ton}; \quad g = 0{,}01 \text{ \$ m/n}.$$

La diferencia en el valor de g se explica por requerirse menor peso muerto para el transporte del mismo peso útil.

Se pide calcular la longitud de vía a construir, a fin de obtener utilidad máxima, llevando (o trayendo) a las dos cargas hasta (o desde) punta de rieles.

Aquí cabe estudiar tres situaciones distintas.

1° Adoptar la distancia para la cual se consigue el máximo de utilidad con la carga A y sumarle la utilidad que para esa distancia proporciona la otra.

2° Adoptar la distancia para la cual se consigue el máximo de utilidad con la carga B, y sumarle la utilidad que para esa distancia produce la carga A.

3° Considerar el conjunto de las dos cargas y determinar una distancia intermedia, la misma para las dos clases de cargas, y que aun sin ser la correspondiente al máximo de ninguna de ellas, produzca dos utilidades que, sumadas, den un total superior al de cualquiera de los otros dos casos.

Con la primera hipótesis, ya vimos en el ejemplo anterior que la distancia era de 250 Km., y la utilidad dejada por la carga A, de 380.000 \$ m/n. Para esa distancia, la tarifa aplicable a la carga B es

$$y = \frac{v}{x^0}\, x = \frac{15}{250}\, x = 0{,}06\, x$$

La fórmula de la utilidad será

$$U_B = \frac{1}{3f}\, \gamma\, vx\, (v - 1{,}85\, gx) = \frac{1}{3\,(0{,}35)}\, 30\,(15)\, x\, [15 - 1{,}85\,(0{,}01)\, x] =$$

$$= 428\, x\, (15 - 0{,}0185\, x)$$

que para $x = 250$ Km. resulta:

$$U_B = 428\ (250)\ [15 - 0{,}0185\ (250)] = 1.110.125\ \$\ \text{m/n}$$

$$\therefore \quad U_A + U_B = 380.000 + 1.110.125 = 1.490.125\ \$\ \text{m/n}.$$

Con la segunda hipótesis, la distancia para la cual se produce el máximo de utilidad con la carga B es

$$x = \frac{v}{3{,}7\ g} = \frac{15}{3{,}7\ (0{,}01)} = 405\ \text{Km}.$$

Adoptada esta longitud para la construcción del ferrocarril, las tarifas respectivas serían:

$$y_A = \frac{10}{405}\ x = 0{,}0246\ x \quad ; \quad y_B = \frac{15}{405}\ x = 0{,}037\ x$$

y las utilidades

$$U_A = 304\ (405)\ [10 - 0{,}02\ (405)] = 233.928$$

$$U_B = 428\ (405)\ [15 - 0{,}0185\ (405)] = 1.301.783.$$

$$U_A + U_B = 1.535.711\ \$\ \text{m/n}.$$

suma algo superior a la que nos proporciona la primera hipótesis; pero han sido necesarios 155 Km. más de ferrocarril, lo que presupone una inversión de 7.750.000 pesos moneda nacional, para obtener apenas 45.000 $ m/n más de utilidades.

Con la tercera hipótesis, determinaríamos una distancia intermedia,

$$x = \frac{32\ (10)^2 + 30\ (15)^2}{3{,}7\ [32\ (10)\ (0{,}0107) + 30\ (15)\ (0{,}01)]} = \frac{9950}{29{,}32} = 339\ \text{Km}.$$

Adoptaremos 340; las tarifas respectivas serían

$$y_A = \frac{10}{340}\ x = 0{,}0294\ x \quad ; \quad y_B = \frac{15}{340} = 0{,}0441\ x$$

y las utilidades

$$U_A = 304\ (340)\ [10 - 0{,}02\ (340)] = 330.752\ \$\ \text{m/n}.$$

$$U_B = 428\ (340)\ [15 - 0{,}0185\ (340)] = 1{,}267.479\ \$\ \text{m/n}$$

$$U_A + U_B = 1.589.231\ \$\ \text{m/n},$$

que, como se ve, son mayores que con cualquiera de las dos hipótesis precedentes. En particular, es interesante el hecho de que se consigan casi 63.000 $ m/n más de utilidades que con el cálculo inmediato anterior, a pesar de suponerse en explotación 65 Km. menos de línea férrea.

Sin embargo, no és ésta la solución más favorable: porque se puede construir el ferrocarril hasta los 405 Km., pero no hacer los transportes de la mercadería A más que hasta los 250 Km.; entonces las tarifas son:

$$y_A = \frac{10}{250}\, x = 0{,}04\, x \quad ; \quad y_B = \frac{15}{405}\, x = 0{,}037\, x$$

y la suma de las respectivas utilidades ya calculadas

$$U_A + U_B = 380.000 + 1.301.783 = 1.681.783 \text{ \$ m/n}$$

que superan las previstas en los otros tres casos.

El máximo del interés se obtendrá, sin embargo, construyéndose sólo 250 Km.; cuando rigen tarifas kilométricas, no interesa a las empresas la prolongación de sus líneas más allá de ciertos límites, que como se, ve, son muy reducidos.

Mediante pequeñas modificaciones, se puede igualmente aplicar estas teorías a casos prácticos distintos de los considerados más arriba. Por ejemplo, supongamos que entre las cargas exista una (o varias), que *no* sean proporcionales a la *superficie* de la zona, como los cereales, sino aproximados a la *longitud* de la vía, lo que equivale a un consumo o producción constante por Km. tal como sucede con las mercaderías generales de almacén, tienda, ferretería, etc., dentro de ciertos límites.

Sean entonces c_1, c_2 estos valores; $c_1\, x$; $c_2\, x$; $c_r\, x$, sean las toneladas a transportar, que supondremos concentradas a la mitad de la distancia x; las toneladas-Km. útiles serán

$$c_1 \frac{x^2}{2} \quad ; \quad c_2 \frac{x^2}{2} \quad \ldots \quad c_r \frac{x^2}{2},$$

a las cuales aplicaremos la tarifa $\frac{v_r}{x}$, gastanto 1,85 g_i para el transporte; en conclusión, la utilidad total será

$$U = \Sigma\, c_r \frac{x^2}{2} \left(\frac{v_r}{x} - 1{,}85\, g_r \right) = \frac{1}{2} \Sigma\, c_r\, x\, (v_r - 1{,}85\, g_r\, x)$$

expresión que sumaremos a la anteriormente encontrada, teniendo entonces

$$U = \frac{1}{3f} \Sigma\, \gamma_n\, v_n\, x\, (v_n - g_n\, x) + \frac{1}{2} \Sigma\, c_r\, x\, (v_r - 1{,}85\, g_r\, x)$$

de la cual obtendremos por derivación e igualación a cero, el valor de x que produce la utilidad máxima

$$x = \frac{2 \Sigma \gamma_n v_n^2 + 3 f \Sigma c_r v_r}{4 \Sigma \gamma_n v_n g_n + 11{,}1 f \Sigma c_r g_r}$$

y con ella fijaremos las tarifas de cada una de las clases de carga. El problema queda así completamente resuelto en teoría, si todos los transportes deben ser hechos hasta punta de rieles pero la solución práctica puede consistir en limitar los tráficos de cada clase de carga hasta la distancia de los máximos respectivos, tal como se ha visto en el último ejemplo.

Estos resultados son aplicables lo mismo a un ferrocarril que a cualquier otra empresa de transportes que tenga tarifas kilométricas — por ejemplo, las de ómnibus o camiones que efectúan servicios por carretera, — y siempre que se cumplan las otras hipótesis hechas al principio, entre las cuales es fundamental la constancia del gasto g de transporte por ton.-Km para todo valor de x, lo que, si bien se verifica para el ferrocarril, no parece serlo igualmente en el caso de los automotores por caminos.

Estudiaremos ahora el caso de un ferrocarril ya construído, y con una longitud *menor* de la que corresponde a la distancia que produce el máximo de utilidad de una carga.

(Continuará)

ERRATA

En la « *Nota sobre la formación del salitre chileno* » publicada en los « ANALES » de Mayo, página 375, al final del renglón número 15 en lugar de NO_3H_2, debe ser NO_3H. La última fórmula debe escribirse en la siguiente forma:

$$NO_3H + NaCl \longrightarrow NO_3Na + HCl$$

ADDENDA

Al final de la nota « *Sobre los puntos singulares de las funciones analíticas* » del Dr. CARLOS BIGGERI, páginas 430 y 431 de estos « ANALES » léase: Fué entregada para su publicación a la *Sociedad Científica Argentina* el 5 de mayo de 1939.

ÍNDICE GENERAL

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO CENTÉSIMO VIGÉSIMO SÉPTIMO

PÁG.

ANTONIO VALEIRAS. — Determinación de las singularidades de las curvas unicursales 38

REINALDO VANOSSI. — Dispositivo para la técnica con electrodo gotero de mercurio (polarografía de Heyrovsky) 66

JUAN M. ALESSI. — Estudio elemental del complejo bihiperbólico 81

C. E. DIEULEFAIT. — Determinación de los momentos de las probabilidades hipergeométricas ordinarias y en el caso de contagio (Polya) 108

VLADIMIR BORZACOV. — El granito y las efusiones basálticas del extremo austral de las sierras de Córdoba 118-186

CARLOS RUSCONI. — Fósiles puelchenses del partido de Matanzas 144

W. KNOCHE. — Nota sobre el significado del rocío 150

JORGE GASCÓN Y EDUARDO R. SCHEGGIA. — Un método clínico para la determinación de colesterolemia 152

JUAN C. VIGNAUX. — Extensiones del teorema de Abel-Stolz y sobre algunas transformaciones funcionales lineales (*Conclusión*) 161

EMILIO REBUELTO. — Tarifas ferroviarias de utilidad máxima, 207, 306, 377 y 462

W. KNOCHE. — Sobre la etimología de la palbra « garúa » 230

FÉLIX CERNUSCHI. — Nota sobre la presión de un sólido 235

J. C. VIGNAUX. — Sobre las funciones polígenas de variable compleja y bicompleja hiperbólica 241-407

A. E. SAGASTUME BERRA Y AGUSTÍN DURAÑONA Y VEDIA. — Fundamentación axiomática del cálculo vectorial 268

ENRIQUE LOEDEL PALUMBO Y ERNESTO R. SABATO. — Una nueva forma de introducir la temperatura 271

CARLOS A. SAGASTUME Y VIRGILIO OLIVA. — La urobilina en la identificación de ínfimas cantidades de cobre y de mercurio 282

KENNETH J. HAYWARD. — Hesperioidea argentina IX 285

CARLOS RUSCONI. — Observaciones craneanas en los elefantes de mar.... 294

ALBERTO E. SAGASTUME BERRA. — Sobre una definición algebraica de las derivadas 321

MISCHA COTLAR. — Estructuras de anágenos 328-432

M. ENRIQUE V. ZAPPI ET MLLE. ALICE MANINI. — Sur un nouveau réactif général de la forme énolique: le nitrate mercureux. (IV) établissement du mecanisme de la réaction 348

Pág.

AUGUST BUSCH. — Un lepidóptero nuevo que perjudica el níspero en la Argentina 361
EMILIO L. DÍAZ. — Sobre las invasiones de aire polar 366
W. KNOCHE. — Una nota sobre la formación del salitre chileno 375
CARLOS BIGGERI. — Sobre los puntos singulares de las funciones analíticas 430

E. R. — Noticiario 73

C. C. D. — Bibliografía ..... 78, 158, 237, 319 y 393

SECCION SANTA FE de la Sociedad Científica Argentina:
Ciclo de conferencias:
Conferencia del Dr. ALFREDO CASTELLANOS. — El subsuelo de Rosario.. 3
Conferencia del Dr. RICARDO A. GAIBROIS. — Algunos aspectos modernos de la ingeniería sanitaria 13
Sesión de comunicaciones del 4 de Noviembre de 1938 32
J. BABINI. — Sobre un tipo de ecuaciones diferenciales lineales..... 32
HORACIO DAMIANOVICH. — ¿Puede obtenerse helio molecular a partir de sus compuestos metálicos? 32
J. GOLLAN (H.) Y M. R. CODINI. — Control del análisis mecánico del suelo 32
GUSTAVO A. FESTER. — Las materias tanantes del quebracho colorado.. 36
Asamblea ordinaria del 29 de Abril de 1939 401
Visita a la destilería San Lorenzo, de Y. P. F. 401
Informe de la Presidencia leído en la asamblea ordinaria, del día 29 de Abril de 1939 402

SOCIOS ACTIVOS

Abrines, Héctor Aníbal
Aguilar, Félix
Aibizzati, Carlos M.
Alessi, Juan M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arce, Manuel J.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Bado, Atilio A.
Bachmann, Ernesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Baliani, Luis M.
Bancalari, Agustín
Bandoni, Alfredo J.
Barabino Amadeo, S.
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordas, Alejandro F.
Bordenave, Pablo E.
Borzacov, Vladimir
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Buich, Raúl
Bula, Clotilde A.
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Burkart, Arturo
Busso, Eduardo B.
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Canale, Humberto
Canal Feijoo, Bernardo
Capelli, Pedro F.
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carli, Félix D.
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Ceppi, Héctor
Cernuschi, Félix
Clos, Enrique C.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Ini, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Dennler, Jorge
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
Kervor, Juan B.
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Knoche, Walter
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Ligniéres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
López Sommaschini, Antonio
Loudet, Osvaldo
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Magnin, Jorge
Mainini, Carlos
Malloi, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Meriggi, Juan C.
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moragues Bernat, Jaime
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nielsen, Juan
Novelli, Armando
Oglobiin, Alejandro
Oliveri, Alfredo E.
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Ottonello, Néstor J.
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitoví, y Oliveras, A.
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Parodi, Rodolfo
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rebuelto, Emilio
Reece, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.

Rissotto, Atilio A.
Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Germinal
Rodríguez, Miguel
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruiz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G
Sanrocán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma,, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Sordelli, Alfredo
Soler, Frank L.
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Taiana, Alberto F.
Taiana, Jorge
Tarragona, José
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela Gil, José
Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Verdaguer, Juan
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Vignati, Milciades A.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
Wunenburger, Gastón
Wauters, Carlos
Wernicke, Raúl
White, Guillermo J.
Williams, Adolfo T.
Yepes, José
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalía, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Cotlar, Mischa
Devoto, Carlos Alberto
Ebin, José
Elizondo, Francisco M.
Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Goyena, Ricardo J.
Gorchs, Agustín C.
Laclau, Juan Pedro
Magne de la Croix, P. A.
Mailhos, Luis E.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Sadosky, Manuel
Somonte, Eduardo
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan Olsacher; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretario de actas, Dr. Guillermo V. Stuckert; Secretario de correspondencia, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Sr. Bernardo Pilotto; Pro-tesorero, Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales: Ing. Clodoveo Pascualini; Ing. Jorge E. Bobone; Ing. Luis Chechi; Ing. Ambrosio L. Taravella; Dr. Federico Padula; Dr. José Carlomagno; Dr. Meade L. Zimmer; Sr. Enrique Sparn.

SOCIOS ACTIVOS

Aguiar, Henoch D.
Bobone, Jorge E.
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fontana, Lorenzo F.
García, Daniel
Godoy, Salvador A.
Gordillo, Pedro N.
Hosseus, Carlos Curt
Larrauri, Agustín C.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio
Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Raúl T.
Olaf Lütz ow, Holm
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez J. Gambastiani de

Pilotto, Bernardo
Ponce Laforgue, Carlos
Rothlin, Edwin

Schmiedecke, Augusto
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.

Taravella, Ambrosio L.
Trebino, Natalio
Urciolo, Victorio

Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.
Zimmer, Mesde L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. José Piazza; Vice-presidente, Ingº Civil Francisco E. Urondo; Secretario de correspondencia, Ingº Quím. Rodolfo G. Christen; Secretario de actas, Ingº Quím. Carlos C. Christen; Tesorero, Ingº Quím. Guillermo Berráz; Vocal 1º, Ingº Civil José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocales suplentes, Ingº Agrº Bruno Santini y Prof. Julio Salaber; Encargado de Publicaciones, Ingº Civil José Babini; Encargado de Canje, Ingº Quím. Rodolfo Rouzaut.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bossi, Celestino
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Cohan, Marcos
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos

Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.)
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá, Tolrá Antonio
Kleer, Gregorio
Lachaga, Dámaso A.
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando

Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo

Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Eduardo Carette; Vice-presidente, Ingº Cayetano C. Piccione; Secretario, Sr. Adrián Ruíz Leal; Tesorero, Sr. Manuel Tellechea; Bibliotecario, Prof. Aníbal Ruíz; Vocales: Dr. Juan B. Lara; Ingº Juan P. Toso; Ingº Angel Stura; Sr. Ranulfo Rosales; Dr. Juan P. Paganotto; Dr. Mario Bidone.

SOCIOS ACTIVOS

Ahumada, Ciro
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Castillo, José
Croce, Francisco M.

Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Guevara, José R.
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.

Magistretti, Guillermo
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Navarro Correas, José A.
Paganotto, Juan P.
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Richard, Alfonso E.
Rosales, Ranulfo S.
Ruíz, Aníbal

Ruíz Leal, Adrián
Sáez Medina, Miguel
San Martín, José Benito de
Serra, Luis Angel
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan F.

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretaria, Dra. Juana Cortelezzi; Tesorero, Dr. Carlos T. Teobaldo; Vocales: Ingº Juan Sabato, Ingº Manuel Ucha, Dr. Pedro G. Paternosto, Dr. Alberto E. Sagastume Berra.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Amarante, Pedro C.
Angli, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Víctor M.
Basualdo, Washington S.
Bauer, Conrado
Bonet, Luis A.
Brau, Eduardo F.
Canals Frau, Salvador
Carusi, Oreste
Coria, Pedro E.
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann, Federico E
Daló, Héctor R.
Delprato, Ismael
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Inda, Carmen
Lizarán, Fernando
Lockart, Carlos E.
Loedel Palumbo, Enrique
Mc Loughlin, Rogelio P.
Magliano, Hilario
Marmonti, Angel
Massimino, Blas
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A.
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Pera, Tomás Carlos
Platzceck, Ricardo P.
Rodríguez, Marcelo R. N.
Sabato, Juan
Séez, Francisco A.
Sagastume Berra, A. E.
Sagastume, Carlos A.
Scheggia, Eduardo R.
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto L.
Trejo, César A.
Ucha Udabe, Manuel
Vucetich, Danilo C.
Wilkens, Alejandro

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas	Lima
Bachmann, Carlos J.	Lima
Bodenbender, Guillermo	Córdoba
Bolívar, Ignacio	Madrid
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)
Borel, Emile	París
Bragg, William Henry	Londres
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Darmois, Eugenio	Nancy (Fr.)
Darmois, Georges	París
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Escomel Edmundo	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larraín, Arturo ..	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
González del Riego, Felipe ..	Lima
Greve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	París
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	París
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Keiper, Guillermo	Berlín
Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul	París
Levi Civita, Tulio	Roma
Lobo, Bruno	Río de Janeiro
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Monjaráz, Jesús E.	México
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I. P.)
Perrin, Tomás G.	México
Perrine, Carlos D.	Córdoba
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rowe, Leo S.	New York
Tello, Julio C.	Lima
Valle, Rafael H.	México
Vélez, Daniel M.	México
Villarán, Manuel V.	Lima
Vitoria, Eduardo	Barcelona
Volterra, Vito	Roma